Abhänigkeit vom Gitter

Vortrag zum Seminar „Elliptische Funktionen und elliptische Kurven“, 11.01.2006

Dennis Grob

Im Vortrag 8 wurde gezeigt, daß für ein Gitter Ω mit Basis (ω_1, ω_2) und $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2}$

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-2} \wp(\frac{z}{\omega_2}; \tau, 1),$$
$$G_k(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-k} G_k(\tau, 1), \qquad k \geq 3,$$

mit .Indem man gegebenenfalls ω_2 durch $-\omega_2$ ersetzt, kann man sich auf ein Gitter der Form

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}\,,\ \tau \in \mathbb{H}$$

beschränken.

Da wir das zweite Element der Basis stets gleich wählen und nur das erste Element τ variieren, können wir nun G_k, Δ und j als Funktionen in τ betrachten und die Eigenschaften dieser Funktionen untersuchen.

§ 1 Reihenentwicklung der G_k

Wir betrachten in diesem Paragraphen Gitter der Form

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}\,,\ \tau \in \mathbb{H}$$

Wir wiederholen in diesem speziellen Fall die Definition der Eisensteinreihen.

(1.1) Definition (Eisensteinreihen)
Die Eisensteinreihen G_k, $k \geq 4$ gerade, werden definiert durch

$$G_k(\tau) := G_k(\tau, 1) = \sum_{m,n}{}' (m\tau + n)^{-k} := \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (m\tau + n)^{-k}$$ ◇

Um später eine Reihenetwicklung der G_k herzuleiten, benötigen wir zunächst das folgende

(1.2) Lemma
Seien $\tau \in \mathbb{H}$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.Dann gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r\tau}. \qquad \diamond$$

Beweis
Nach Analysis IV, XXI.(4.2) (Partialpruchentwicklungs des Contangens) gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\pi cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

wobei beide Seiten konvergieren lokal gleichmäßig konvergieren.

Differenziert man den rechten Teil der Gleichung, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}\right) \\
= \quad & \frac{-1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(z^2-n^2) - 2z \cdot 2zn}{(z^2-n^2)^2} \\
= \quad & \frac{-1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z^2 - 2n^2}{(z^2-n^2)^2} \\
= \quad & \frac{-1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2 + 2n^2}{z+n)^2(z-n)^2} \\
= \quad & \frac{-1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z+n)^2} + \frac{1}{(z-n)^2}\right) \\
\overset{\text{abs.Konv.}}{=} \quad & \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z+n}
\end{aligned}$$

Damit folgt auf Grund der lokal gleichmäßigen Konvergenz:

$$(\pi cot(\pi z))' = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z+n})' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{-1}{(z+n)^2}$$

Da für $z \in \mathbb{H}$ aber $| e^{2\pi i z} | < 1$ gilt, erhalten wir

$$(\pi cot(\pi z))' = \left(\frac{\pi}{sin\pi z}\right)^2 = \left(\frac{-2\pi i}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}\right)^2 = (-2\pi i)^2 e^{2\pi i z}\left(\frac{1}{1-e^{2\pi i z}}\right)^2$$

Beide Seiten sind nach WEIERSTRASS (Ana IV,XVIII.(5.1)) holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, damit folgt die Behauptung durch Differenzieren für allg. k. □

Zur weiteren Formulierung sei hier nochmal die Definition zweier wichtiger Funktionen aus der Analytischen Zahlentheorie gegeben:

(1.3) Definition

a) Für $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 1$ sei

$$\zeta(s) := \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}.$$

ζ wird die *Riemansche Zetafunktion* genannt.

b) Für $k, m \in \mathbb{N}$ sei

$$\sigma_k(m) := \sum_{d \in \mathbb{N}, d|m} d^k .$$

◇

Damit können wir nun eine Reihenentwicklung von G_k angeben und das Verhalten unter Transformation mit Matrizen aus der $SL(2;\mathbb{Z})$ bestimmen.

(1.4) Satz

Seien $\tau \in \mathbb{H}$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$ gerade. Dann gilt

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Die Reihe konvergiert für $\varepsilon > 0$ in jedem Bereich $\{\tau \in \mathbb{H}; Im\tau \geq \varepsilon\}$ absolut gleichmäßig. Alle G_k sind auf $\mathbb{H}$ holomorph und erfüllen

$$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k G_k(\tau)$$

für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$. ◇

Beweis

$G_k(\tau)$ ist nach dem Konvergenz-Lemma (V 4,(3.4)) absolut konvergent. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& G_k(\tau) = G_k(\Omega) = G_k(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}) \\
= \quad & \sum_{m,n}{}' (m\tau + n)^{-k} \\
= \quad & \sum_{n \neq 0} n^{-k} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k} \\
= \quad & 2\zeta(k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k} \\
\stackrel{(1.2)}{=} \quad & 2\zeta(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i \tau}.
\end{aligned}$$

Mit (1.2) und der absoluten Konvergenz ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
G_k(\tau) &= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r s \tau} \\
&\stackrel{m=sr}{=} 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r|m, r \in \mathbb{N}} r^{k-1} e^{2\pi i m \tau} \\
&= 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.
\end{aligned}$$

Da die Reihe

$$2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}$$

lokal gleichmäßig konvergiert, die Holomorphie aus dem Satz von Weierstraß.

Die Identität

$$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k G_k(\tau)$$

folgt sofort aus V 8, Satz(3.5).
Insbesondere gilt $G_k \not\equiv 0$,da die Koeffizienten der Reihenentwicklung nicht verschwinden.

Zur lokal gleichmäßigen Konverganz der Reihe:

Sei $U \subset \mathbb{H}$ kompakt und $y_0 := min\{Im\tau; \tau \in U\} > 0$.
Für $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sigma_{k-1}(m) \leq \sum_{d|m, d\in\mathbb{N}} d^{k-1} \leq \sum_{d=1}^{m} d^{k-1} \leq \sum_{d=1}^{m} m^{k-1} = m^k.$$

Für $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ und $\tau \in U$ gilt damit

$$\left| \sum_{m=\nu}^{\mu} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \right| \leq \sum_{m=\nu}^{\mu} |\sigma_{k-1}(m)| \cdot e^{-2\pi m Im\tau} \leq \sum_{m=\nu}^{\mu} m^k e^{-2\pi m y_0}$$

Nach (1.2) ist $\sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{2\pi i m(iy_0)}$ konvergent, da $iy_0 \in \mathbb{H}$.
Also existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{m=\nu}^{\mu} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \right| \leq \sum_{m=\nu}^{\mu} m^k e^{-2\pi m y_0} \; < \; \varepsilon \, \forall \, \mu \geq \nu \geq N$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe des vorherigen Satzes erhalten wir im Speziellen Reihendarstellungen der wichtigen Funktionen G_4 und G_6.

(1.5) Bemerkung
Mit $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ (vgl. Analysis IV, XXI.§4) erhält man aus (1.4)

$$G_4(\tau) = \frac{\pi^4}{45}(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) e^{2\pi i m\tau}),$$

$$G_6(\tau) = \frac{2\pi^6}{945}(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) e^{2\pi i m\tau}).$$

◇

Mit den vorangegangenen Darstellungen und der Aussage, daß jedes G_k ein Polynom in G_4 und G_6 ist, können wir nun folgende amüsante zahlentheoretische Aussage herleiten.

(1.6) Korollar (HURWITZ-*Identität*)

$$\sigma_7(m) = \sigma_3(m) + 120 \sum_{r,s\in\mathbb{N}, r+s=m} \sigma_3(r)\sigma_3(s), \; m \geq 1.$$

◇

Beweis
Nach V7, (2.6) gilt $7G_8 = 3G_4^2$.
Einsetzen von (1.4),(1.5) liefert dann

$$7(2\zeta(8) + 2\frac{(2\pi)^8}{7!}\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_7(m)e^{2\pi i m\tau}) = 3(\frac{\pi^8}{45^2}(1 + 240\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_3(m)e^{2\pi i m\tau})^2).$$

Wegen

$$\frac{3\pi^8}{45^2}(1 + 480\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_3(m)e^{2\pi i m\tau} + 240^2\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_3(r)\sigma_3(s-r)e^{2\pi i rs\tau})$$

$$= \frac{3\pi^8}{45^2}(1 + 480\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_3(m)e^{2\pi i m\tau} + 240^2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r+s=m}^{\infty}\sigma_3(r)\sigma_3(s)e^{2\pi i m\tau})$$

ergibt sich dann mit Koeffizientenvergleich

$$7\frac{2(2\pi)^8}{7!}\sigma_7(m) = \frac{3\pi^8}{45^2}(480\sigma_3(m) + 240^2\sum_{r+s=m}^{\infty}\sigma_3(r)\sigma_3(s)e^{2\pi i m\tau}).$$

Daraus folgt

$$\sigma_7(m) = \sigma_3(m) + 120\sum_{r+s=m}^{\infty}\sigma_3(r)\sigma_3(s)e^{2\pi i m\tau}),$$

also die Behauptung. □

Es folgt noch eine Bemerkung, in der ein alternativer Beweis zur HURWITZ-*Identität* angegeben wird.

(1.7) Bemerkung (alternativer Beweis zur HURWITZ-*Identität*)
Für eine unbestimmte x (oder eine reelle Variable x mit $|x| < 1$) setzt man

$$F_n := F_n(x) := \frac{x^n}{1-x^n} \qquad , \; n \in \mathbb{N}.$$

Mit dieser Definition gilt

$$\sum_n \sigma_r(n)x^n = \sum_m m^r F_m \tag{1}$$

Dazu

$$\sum_n \sigma_r(n)x^n = \sum_n \sum_{d|n} d^r x^n = \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d^r x^{nd} \overset{geom.Reihe}{=} \sum_d d^r\left(\frac{1}{1-x^n} - 1\right) = \sum_d \left(\frac{x^n}{1-x^n}\right) \tag{2}$$

Weiter gilt

$$F_m F_n = F_{m+n}(F_m + F_n + 1) \tag{3}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} F_m + F_n + 1 &= \frac{x^{m+n}}{1-x^{m+n}}\left(\frac{x^m}{1-x^m} + \frac{x^n}{1-x^n} + 1\right) \\ &= \frac{x^{m+n}(x^m(1-x^n) + x^n(1-x^m) + (1-x^m)(1-x^n))}{(1-x^{m+n})(1-x^m)(1-x^n)} \\ &= \frac{x^{m+n}(x^m - x^{m+n} + 1 - x^{m+n} + x^n - x^m - x^n - x^{m+n}))}{(1-x^{m+n})(1-x^m)(1-x^n)} \\ &= \frac{x^{m+n}(x^{m+n}+1)}{(1-x^{m+n})(1-x^m)(1-x^n)} \\ &= \frac{x^{m+n}}{(1-x^m)(1-x^n)} \\ &= F_m F_n \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$A_k := \sum_{m+n=k} mnF_mF_n, B_k := \sum_{n-m=k} mnF_mF_n, C_k := kF_k \sum_m mF_m,$$

so gilt:

$$A_k = 2F_k \cdot \sum_{m<k} m(k-m)F_m + \frac{k^3-k}{6}F_k \tag{4}$$

$$B_k = 2C_k + F_k \cdot \sum_{m<k} m(m-k)F_m - \sum_{m>k} m(m-k)F_m \tag{5}$$

zu (1):

$$\begin{aligned}
A_k &= \sum_{m+n=k} mnF_mF_n = \sum_{m<k} m(m-k)F_mF_{k-m} = F_k \sum_{m<k} m(k-m)(F_m + F_{k-m} + 1) \\
&= F_k \sum_{m<k} m(k-m)F_m + F_k \sum_{m<k} m(k-m)F_{k-m} + \sum_{m<k} m(k-m) \\
&= 2F_k \sum_{m<k} m(k-m)F_m \frac{k^3-k}{6} F_k
\end{aligned}$$

zu (2):

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{n-m=k} mnF_mF_n \\
&= \sum_{m=1, n:=m+k}^{\infty} m(m+k)F_mF_{m+k} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_{m+k}(F_m + F_k + 1 - (F_k+1)) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_kF_m - (F_k+1) \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_{m+k} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m(m+2k-k)F_kF_m - (F_k+1) \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_{m+k} \\
&= 2kF_k \sum_{m=1}^{\infty} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-k)F_kF_m - (F_k+1) \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_{m+k} \\
&\overset{j:=m+k}{=} 2C_k + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-k)F_kF_m - (F_k+1) \sum_{j>k} (j-k)jF_j \\
&= 2kF_k \sum_{m=1}^{\infty} + \sum_{m=1}^{k} m(m-k)F_kF_m - \sum_{j>k} (j-k)jF_j \\
&= 2kF_k \sum_{m=1}^{\infty} + \sum_{m<k} m(m-k)F_kF_m - \sum_{m>k} m(m-k)jF_m
\end{aligned}$$

Man erhält nun die Aussage

$$A_k + 2b_k - 4C_k = \frac{k^3-k}{6} F_k - 2 \sum_{m>k} m(m-k)F_m \tag{6}$$

durch einfaches Einsetzen.

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
& (m+n)^4+(m-n)^4-2m^4-2n^4 \\
= \; & (m^4+4m^3n+6m^2n^2+4mn^3+n^4)+(m^4-4m^3n+6m^2n^2-4mn^3+n^4)-2m^4-2n^4 \\
= \; & 12m^2n^2
\end{aligned}$$

Mit dieser Rechnung erhält man nun

$$\begin{aligned}
\left(\sum_n n^3F_n\right)^2 & \overset{Cauchy-Sum.}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} j^3F_j(n-j)^3F_{n-j} \\
& \overset{m=j}{=} \sum_{m,n} m^3F_m n^3F_n \\
& \overset{Nebenr.}{=} \sum_{m,n}\frac{mn}{12}((m+n)^4+(m-n)^4-2m^4-2n^4)F_mF_n \\
& = \sum_{m,n}\frac{mn}{12}(m+n)^4F_mF_n+\sum_{m,n}\frac{mn}{12}(m-n)^4F_mF_n \\
& \quad -2\sum_{m,n}\frac{mn}{12}m^4F_mF_n-2\sum_{m,n}\frac{mn}{12}n^4F_mF_n \\
& = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m+n=k}k^4\frac{mn}{12}F_mF_n+2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n-m=k}k^4\frac{mn}{12}F_mF_n \\
& \quad -2\cdot\sum_{m=0}^{\infty}F_m m^4 m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{12}F_n-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}F_n n^4 n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{12}F_m \\
& = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{12}A_k+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{12}B_k-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{12}C_k-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{12}C_k \\
& = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{12}(A_k+2B_k-4C_k) \\
& \overset{(6)}{=} \sum_k\frac{k^4}{12}\left(\frac{k^3-k}{6}F_k-2\sum_{m\geq k}m(m-k)F_m\right) \\
& = \sum_k\frac{k^4}{12}\cdot\frac{k^3-k}{6}F_k-\sum_k\frac{k^4}{6}\sum_{m\geq k}m(m-k)F_m \\
& = \sum_k\frac{k^4}{12}\cdot\frac{k^3-k}{6}F_k-\sum_m F_m\frac{m}{6}\sum_{k\leq m}k^4(m-k) \\
& = \sum_k(k^7-k^3)F_k
\end{aligned}$$

Nun gilt nach (2)

$$120\left(\sum_n n^3F_n\right)^2 = 120\left(\sum_n \sigma_3(n)x^n\right)^2 = 120\left(\sum_n \sum_{r+s=n} \sigma_3(r)\sigma_3(s)x^n\right)$$

mit der gleichen Rechnung wie im ersten Beweis.

Weiter gilt

$$\sum_k (k^7-k^3)F_k = \sum_k k^7F_k - \sum_k k^3F_k \overset{(2)}{=} \sum_k \sigma_7(k)x^k - \sum_k \sigma_3(k)x^k$$ ◇

Damit folgt die Behauptung durch Koeffizientenvergleich und auflösen nach σ_7.

§ 2 Die Diskriminante

In diesem Abschnitt wird die *Diskrimante* untersucht und, unter Verwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 1, die Reihendarstellung dieser Funktion bestimmt.

Wir wiederholen die Definition der Diskriminante aus Vortrag 7.

(2.1) Definition (Diskriminante)
Sei

$$g_2(\tau) := 60G_4(\tau) \quad , \quad g_3(\tau) := 140G_6(\tau).$$

Dann heißt

$$\Delta(\tau) := g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)$$

die *Diskriminante*. ◇

Da die $g_k, k \in \{2,3\}$ über G_4 bzw.G_6 definiert sind, können wir mit den Aussagen des ersten Abschnitts wieder Reihendarstellungen angeben.

(2.2) Bemerkung
Aus (1.5) erhält man

$$g_2(\tau) = \frac{(2\pi)^4}{12}(1 + 120 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m)e^{2\pi i m\tau}),$$

$$g_3(\tau) = \frac{(2\pi)^6}{216}(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m)e^{2\pi i m\tau})$$ ◇

Da Δ ein Polynom in g_2 und g_3 ist, läßt sich jetzt relativ leicht eine Reihendarstellung angeben und das Transformationsverhalten untersuchen.

(2.3) Satz
Die Diskriminante $\Delta(\tau)$ besitzt eine FOURIER-*Entwicklung* der Form:

$$\Delta(ö) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m ö},\ ö \in \mathbb{H}$$

mit Koeffizienten $\tau(m) \in \mathbb{Z}$ und $\tau(1) = 1$. Die Diskriminante $\Delta : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion mit $\Delta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$ und

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12}\Delta(z)$$

für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$. ◇

Beweis
Wir setzen

$$A := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) e^{2\pi i m\tau}, B := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) e^{2\pi i m\tau}.$$

Damit ergibt sich

$$g_2(\tau) = \frac{(2\pi)^4}{12}(1+240A), g_2(\tau) = \frac{(2\pi)^6}{216}(1-504B)$$

sowie

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) = \Delta := g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) &= \frac{(2\pi)^{12}}{12^3}(1+240A)^3 - 27\frac{(2\pi)^{12}}{216^2}(1-504B)^2 \\ &= \frac{(2\pi)^{12}}{12^3}(a_1A + a_2A^2 + a_3A^3 + a_4B + a_5B^2) \\ &= (2\pi)^{12}(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_n}{12^3} e^{2\pi i m\tau}) \end{aligned}$$

mit $a_j, b_n \in \mathbb{Z}$ für alle j, n
Behauptung: $\frac{b_n}{12^3} \in \mathbb{Z}$ für alle n
Es gilt $d^3 \equiv d^5$ (mod 12) für alle $d \in \mathbb{Z}$ (1)
$\Rightarrow \sigma_3(m) \equiv \sigma_5(m)$ (mod 12) für alle $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow A \equiv B \pmod{12}$ (koeffizientenweise)
Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& (1+240A)^3 - (1-504B)^2 \\
= \; & \underbrace{720}_{=5\cdot 12^2} A + \underbrace{240^2 \cdot 3}_{=(20\cdot 12\cdot 3)^2} A^2 + 240^3 A^3 + 2\cdot 12\cdot 6\cdot 7B + \underbrace{504^2}_{=(12\cdot 6\cdot 7)^2} B^2 \\
\equiv \; & 12^2(5A+7B) \\
\equiv \; & \sum_{m=1}^{\infty} (5d_m + 7d_m) e^{2\pi i m\tau} \equiv 0 (\mathrm{mod} 12^3)
\end{aligned}$$

mit $d_m \equiv \sigma_3(m) \equiv \sigma_5(m)$ für alle m, $d_j \in \{0 \ldots 11\}$.
Da g_2, g_3 nach (1.4) holomorph sind, ist auch Δ holomorph.
Die Bedingung $\Delta(\tau) \neq 0$ folgt sofort aus V 7,(3.4)
Weiterhin folgt

$$\Delta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{12}\Delta(\tau)$$

aus (1.4) und der Definition von Δ. □

§ 3 Die absolute Invariante

Aus g_2 und Δ definiert man die *absolute Invariante*, für die nicht nur eine Reihenentwicklung hergeleitet werden wird, sondern auch mehrere starke Aussagen über ihr Abbildungsverhalten.

Wir wiederholen zunächst die Definition der absoluten Invariante aus Vortrag 7.

(3.1) Definition (absolute Invariante)
Die *absolute Invariante* wird für $\tau \in \mathbb{H}$ definiert durch

$$j(\tau) := (12g_2(\tau))^3/\Delta(\tau) \qquad \diamond$$

Für die Herleitung einer Reihendarstellung von j wird folgendes Lemma benötigt.

(3.2) Lemma
Sind f und g für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihen,

$$f(q) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n, \quad g(q) = \sum_{n\geq 0} b_n q^n, \quad a_n, b_n \in \mathbb{Z}$$

mit $b_0 = 1$ und $g(q) \neq 0$ für $|q| < 1$, so ist auch f/g eine für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$. $\diamond$

Beweis
Da f und g holomorph sind und $g(q) \neq 0$ für $|q| < 1$, folgt auch, daß $\frac{f}{g}$ holomorph auf $\{q \in \mathbb{C}; |q| < 1\}$ ist.

Damit ist $\frac{f}{g}$ für gewisse $c_m \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe

$$\frac{f}{g} = \sum_{n \geq 0} c_n q^n$$

entwickelbar.Daraus folgt

$$\left(\sum_{n \geq 0} c_n q^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n q^n \right) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$$

Mit Hilfe des Cauchyproduktes gilt daher

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k} = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$a_o = c_0, \quad \underbrace{b_0}_{1} = c_0, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k}$$

Somit muß

$$c_0 \in \mathbb{Z}, \quad c_n b_0 = c_n = a_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k}$$

gelten, also

$$c_n \in \mathbb{Z} \text{ für alle} n \in \mathbb{N}$$ □

Mit dem Lemma läßt sich jetzt eine FOURIER-Entwicklung von j herleiten. Ferner zeigt sich, daß die Konstruktion von j gerade, was der Name auch andeutet, zu Invarianz unter Transformation mit Elementen aus $SL(2;\mathbb{Z})$ führt.

(3.3) Satz
Die absolute Invariante $j : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph und besitz eine FOURIER-Entwicklung der Form

$$j(\tau) = e^{-2\pi i \tau} + \sum_{m \geq 0} j_m \cdot e^{2\pi i m \tau} = e^{-2\pi i \tau} + 744 + 196884 \cdot e^{2\pi i \tau} + \ldots$$

mit $j_m \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = j(\tau) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z}). \qquad \diamond$$

Beweis
Nach (1.4), (2.2) sind g_2, Δ holomorph und somit auch j als rationale Funktion in g_2 und Δ.

Nach (2.2), (2.3) gilt

$$\begin{aligned} j(\tau) &= \frac{12^3 g_2^3}{\Delta(\tau)} \\ &= \frac{12^3 \frac{(2\pi)^{12}}{12^3} \sum_{n\geq 0} a_m e^{2\pi i m\tau}}{(2\pi)^{12} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}} \\ &= \frac{e^{-2\pi i\tau} \sum_{n\geq 0} a_m e^{2\pi i m\tau}}{e^{-2\pi i\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}} \\ &= e^{-2\pi i\tau} \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} a_m e^{2\pi i m\tau}\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \tau(m+1) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right)}_{=:c} \end{aligned}$$

für gewisse $a_n \in \mathbb{Z}$.

Beide Potenzreihen sind konvergente Potenzreihen in $q := e^{2\pi i\tau}$ und haben ganzzahlige Koeffizienten. Da $|q| < 1$ für $\tau \in \mathbb{H}$ und $\tau(1) = 1$ ist, gilt nach (3.2), daß c in eine kovergente Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} c_n \underbrace{e^{2\pi i n\tau}}_{=q}$ in q mit $c_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c_0 = a_0 = 1$ entwickelbar ist.

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} j(\tau) &= e^{-2\pi i\tau}(1 + \sum_{n\geq 1} c_n e^{2\pi i n\tau}) \\ &= e^{-2\pi i\tau} + \sum_{n\geq 1} c_n e^{2\pi i n\tau}. \end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir

$$j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = j(\tau) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z}) \qquad \square$$

sofort aus (1.4), (2.3).

Der folgende Satz gibt an, wie Elemente, die von j auf dieselbe Zahl abgebildet werden, im Zusammenhang stehen.

(3.4) Satz
Sind τ und $\tau' \in \mathbb{H}$ gegeben mit $j(\tau) = j(\tau')$, dann existiert eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$ mit

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \diamond$$

Beweis
Sei $j(\tau) = j(\tau')$, dann folgt mit der Definition

$$j(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}) = j(\mathbb{Z}\tau' + \mathbb{Z})$$

Nach Vortrag 8, (3.2) existiert daher ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so daß

$$\lambda(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\tau' + \mathbb{Z}$$

gilt. Es folgt, daß $(\tau', 1)$, $(\lambda\tau, \lambda)$ Basen von $\Omega := \mathbb{Z}\tau' + \mathbb{Z}$ sind.
Nach dem Basislemma existiert eine Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2;\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda\tau \\ \lambda \end{pmatrix}$$

,also

$$\tau' = a\lambda\tau + b\lambda, \quad 1 = c\lambda\tau + d\lambda$$

und damit folgt

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Weil $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$, folgt aus Vortrag 8, (3.4)

$$det(M) = 1\,, \text{also } M \in SL(2;\mathbb{Z}). \qquad \square$$

Da die $SL(2;\mathbb{Z})$ nicht trivial ist, zeigt der vorige Satz, daß j nicht injektiv ist. Allerdings ist j als Funktion auf $\mathbb{H}$ surjektiv.

(3.5) Satz

$$j(\mathbb{H}) = \mathbb{C} \qquad \diamond$$

Beweis
Angenommen,es existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $j(\tau) \neq c$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$.

Dann ist

$$F(\tau) := \frac{j'(\tau)}{j(\tau) - c}$$

hololomorph, da j holomorph ist.

Sei $\gamma := \sum_{i=1}^{5} \gamma_i$, wobei

$$\begin{aligned}
\gamma_1 :=& \quad [\rho, \frac{1}{2} + 2i], \\
\gamma_2 :=& \quad [\frac{1}{2} + 2i, \frac{-1}{2} + 2i], \\
\gamma_3 :=& \quad [\frac{-1}{2} + 2i, \rho - 1], \\
\gamma_4 :=& \quad [\frac{1}{2}, arg(\rho - 1)] \longrightarrow \mathbb{H}, \phi \mapsto e^{i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\phi}, \\
\gamma_5 :=& \quad [arg(\rho), \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{H}, \phi \mapsto e^{i\frac{3+\sqrt{3}}{2} - i\phi},
\end{aligned}$$

mit $\rho := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$.
Sei G das Gebiet mit $\partial G = \gamma$. Da nach (3.3)

$$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{Z})$$

gilt, erhalten wir mit $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$, daß j und F Periode 1 haben.

Mit $a = d = 0$, $b = -1$, $c = 1$ folgt weiterhin

$$j(-\frac{1}{\tau}) = j(\tau)$$

und damit

$$(j(\tau))' = (j(-\frac{1}{\tau}))' = \frac{1}{\tau^2} j'(-\frac{1}{\tau})$$

Insgesamt folgt daher

$$F(\tau) = \frac{\frac{1}{\tau^2} j'(-\frac{1}{\tau})}{j(-\frac{1}{\tau}) - c} = \frac{1}{\tau^2} F(-\frac{1}{\tau})$$

Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma_3} F(\tau)d\tau &= \int\limits_{\gamma_1^-} F(\tau+1)d\tau \\
&= \int\limits_{\gamma_1^-} F(\tau)d\tau \\
&= -\int\limits_{\gamma_1} F(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma_5} F(\tau)d\tau &= -\int\limits_{\alpha:=\arccos(1/2)}^{\pi/2} F(e^{i\phi})ie^{i\phi}d\phi \\
&= -\int\limits_{\alpha}^{\pi/2} iF(-e^{i(-\phi)})e^{-i\phi}d\phi \\
&= -\int\limits_{\alpha}^{\pi/2} F(-e^{-i\phi})(-i)e^{-i\phi}d\phi \\
&\overset{\phi=-t}{=} -\int\limits_{-\alpha}^{-\pi/2} F(-e^{it})i(-e^{it})dt \\
&= -\int\limits_{-\alpha+\pi}^{\pi/2} F(e^{it})ie^{it}dt \\
&= -\int\limits_{\arccos(-\frac{1}{2})}^{\pi/2} F(e^{it})ie^{it}dt = -\int\limits_{\gamma_4} F(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

Nach (3.2) und (3.3) besitzt j eine FOURIER-Entwicklung der Form

$$
j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m\geq 0} a_m \cdot e^{2\pi i m\tau}
$$

Zu dem nach Voraussetzung $j(\tau) - c \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$, was

$$e^{2\pi i\tau}(j(\tau) - c) \neq 0 \,\text{für alle}\tau \in \mathbb{H}$$

und damit

$$F(\tau) = j'(\tau) \cdot \frac{1}{j(\tau) - c} \quad \underbrace{= e^{2\pi i\tau} j'(\tau)}_{Potenzr. \sum a_i q^i \, mit \, a_o = -2\pi i} \quad \cdot \frac{1}{\underbrace{e^{2\pi i\tau}(j(\tau) - c)}_{Potenzr. \sum b_i q^i \, mit \, b_0 = 1}}$$

impliziert. Mit $q := e^{2\pi i\tau}$ und (3.2) erhalten wir für F eine Potenzreihenentwicklung $\sum c_i q^i$ in q mit $c_0 = -2\pi i$.
Für $\epsilon \geq 0$ ist F auf $S_{\epsilon,\infty}$ holomorph mit Periode 1.
Der SATZ VON DER FOURIER-ENTWICKLUNG (Ana IV,XX.(4.3)) liefert nun

$$-2\pi i = a_0 = \int\limits_{[-\frac{1}{2}+2i, \frac{1}{2}+2i]} F(\tau)d\tau = \int\limits_{\gamma_2^-} F(\tau)d\tau = -\int\limits_{\gamma_2} F(\tau)d\tau$$

Mit dem Residuensatz folgt dann

$$2\pi i \cdot \sum_{\tau \in G} ord_\tau(j - c) = \int\limits_{\gamma} F(\tau)d\tau = \int\limits_{\gamma_2} F(\tau)d\tau = 2\pi i,$$

was ein Wiederspruch zur Holomorphie von $j - c$ ist. □

(3.6) Bemerkung
Betrachtet man anstelle eines Gitters der Form $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ für $\tau \in \mathbb{H}$ ein beliebiges Giter Ω von $\mathbb{C}$, so folgt aus Vortrag 8, Satz (3.2):

$$j(\Omega) = j(\frac{\omega_1}{\omega_2}), \quad \text{falls} Im(\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0.$$ ◇

Beweis

$$j(\Omega) = j(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2) = j(\omega_2(\mathbb{Z}\frac{\omega_1}{\omega_2} + \mathbb{Z})) \overset{V8,(3.2)}{=} j(\mathbb{Z}\frac{\omega_1}{\omega_2} + \mathbb{Z}) = j(\frac{\omega_1}{\omega_2}).$$ □

Mit der Surjektivität von j läßt sich sogar noch zeigen, daß man für eine beliebige Vorgabe von Werten für g_2 und g_3 (unter der Bedingung, daß $\Delta \neq 0$ ist), auch ein entsprechendes Gitter findet.

(3.7) Korollar
Für $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ mit $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$ existiert genau ein Gitter Ω in $\mathbb{C}$ mit $c_2 = g_2(\Omega)$ und $c_3 = g_3(\Omega)$.

Beweis
Es genügt, die Existenz eines solchen Gitters zu zeigen, da nach Vortrag 7,(2.9) dieses Ω durch g_2, g_3 und damit durch c_2, c_3 eindeutig bestimmt ist.
Nach (3.5) existiert zu zu $c := \frac{(12c_2)^3}{c_2^3 - 27c_3^2} \in \mathbb{C}$ ein Gitter Ω mit $j(\Omega) = c$.
zu zeigen: $g_i(\Omega) = c_i$
1.Fall: Sei $c_2 = 0$. Dann folgt $c = j(\Omega) = 0$ und somit mit der Definition von j $g_2 = 0$.
Wähle $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $g_3(\Omega) = \lambda^6 c_3$.
Nach Vortrag 8,(3.1) gilt $g_3(\lambda\Omega) = \lambda^{-6} g_3(\Omega) = c_3$ und $g_2(\lambda\Omega) = \lambda^{-4} g_2(\Omega) = 0 = c_2$, also die Behauptung.

2.Fall: Sei $c_2 \neq 0$. Dann ist $j(\Omega) \neq 0$ und auch $g_2(\Omega) \neq 0$.
Daher existiert

$$0 \neq \lambda \in \mathbb{C} : \lambda^4 c_2 = g_(\Omega)$$

Daraus folgt

$$g_2(\lambda\Omega) = \lambda^{-4} g_2(\Omega) = c_2$$

Nach Vortrag 8, (3.2) gilt

$$j(\lambda\Omega) = j(\Omega)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{12g_2^3(\lambda\Omega)}{g_2^3(\lambda\Omega)^3 - 27g_3(\lambda\Omega)^2} = \frac{12c_2^3}{c_2^3 - 27g_3(\lambda\Omega)^2} = \frac{12g_2^3(\Omega)}{g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega)^2} = \frac{12c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2},$$

also
$c_3^2 = g_3^2$ und damit
$c_3 = g_3$ oder $c_3 = -g_3$. In letzterem Fall gilt

$$c_3 = g_3(i\lambda\Omega),$$

was insgesamt die Behauptung liefert. □