Abbildungsverhalten

Vortrag zum Seminar „Elliptische Funktionen und elliptische Kurven“, 14.12.2005

Christina van Megen

§ 1 Konjugationsstabile Gitter

(1.1) Definition (konjugationsstabil)
Ein Gitter Ω heißt *konjugationsstabil*, wenn mit ω auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\omega}$ zu Ω gehört, das heißt $\Omega = \overline{\Omega}$. Die wichtigsten Beispiele für konjugationsstabile Gitter sind

a) die Rechteck-Gitter: $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit $\frac{1}{i}\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$,

b) das Sechseck-Gitter: $\Omega = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ mit $\rho = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$. ◇

(1.2) Bemerkung
Das Sechseck-Gitter $\Omega = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ mit $\rho = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ hat seinen Namen daher, dass sechs Punkte des Gitters auf dem Einheitskreis liegen.

(1.3) Proposition
Ist Ω ein konjugationsstabiles Gitter, dann gilt

$$\overline{\wp_\Omega(z)} = \wp_\Omega(\overline{z}) \qquad \text{und} \qquad \overline{\wp'_\Omega(z)} = \wp'_\Omega(\overline{z})\,.$$

Speziell gilt für $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$:

a) $\wp_\Omega(z)$ ist reell für $z \in \mathbb{R}$ und $z \in i\mathbb{R}$,

b) $\wp'_\Omega(z)$ ist reell für $z \in \mathbb{R}$ und rein imaginär für $z \in i\mathbb{R}$. ◇

Beweis
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\wp_\Omega(z)} &= \overline{z^{-2} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega}\left((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\right)} \\
&= \overline{z}^{-2} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega}\left((\overline{z}-\overline{\omega})^{-2} - \overline{\omega}^{-2}\right) \\
&\overset{\Omega=\overline{\Omega}}{=} \overline{z}^{-2} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega}\left((\overline{z}-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\right) \\
&= \wp_\Omega(\overline{z})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\overline{\wp'_\Omega(z)} &= \overline{-2\sum_{0\neq\omega\in\Omega}(z-\omega)^{-3}} \\
&= -2\sum_{0\neq\omega\in\Omega}(\overline{z}-\overline{\omega})^{-3} \\
&\overset{\Omega=\overline{\Omega}}{=} -2\sum_{0\neq\omega\in\Omega}(\overline{z}-\omega)^{-3} \\
&= \wp'_\Omega(\overline{z}).
\end{aligned}$$

a) 1.Fall: $z\in\mathbb{R}$, dann gilt $z=\overline{z}\Rightarrow\wp(z)=\wp(\overline{z})\overset{\text{s.o.}}{=}\overline{\wp(z)}\Rightarrow\wp(z)\in\mathbb{R}$.
   2.Fall: $z\in i\mathbb{R}$, dann gilt $z=-\overline{z}\Rightarrow\wp(z)=\wp(-\overline{z})\overset{\wp\text{ gerade}}{=}\wp(\overline{z})\overset{\text{s.o.}}{=}\overline{\wp(z)}\Rightarrow\wp(z)\in\mathbb{R}$.

b) 1.Fall: $z\in\mathbb{R}$, dann gilt $z=\overline{z}\Rightarrow\wp'(z)=\wp'(\overline{z})\overset{\text{s.o.}}{=}\overline{\wp'(z)}\Rightarrow\wp'(z)\in\mathbb{R}$.
   2.Fall: $z\in i\mathbb{R}$, dann gilt $z=-\overline{z}\Rightarrow\wp'(z)=\wp'(-\overline{z})\overset{\wp'\text{ ungerade}}{=}-\wp'(\overline{z})\overset{\text{s.o.}}{=}-\overline{\wp'(z)}\Rightarrow\wp'(z)\in i\mathbb{R}$. □

(1.4) Satz
Für ein Gitter $\Omega=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ sind äquivalent:

(i) $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$ sind beide reell.

(ii) Alle $G_k(\Omega)$, $k\geq 4$ gerade, sind reell.

(iii) Von den Größen e_1, e_2, e_3 sind zwei konjugiert komplex und die dritte reell oder alle drei reell.

(iv) Ω ist konjugationsstabil. ◇

Beweis
$(i)\Rightarrow(ii)$: Es gilt mit der Bezeichnung (2.1) a.) aus Vortrag 7:

$$g_2(\Omega):=60G_4(\Omega) \qquad \text{und} \qquad g_3(\Omega):=140G_6(\Omega).$$

Für g_2 und g_3 beide reell folgt, dass auch $G_4(\Omega)$ und $G_6(\Omega)$ beide reell sind. Nehme nun die Rekursionsformel aus Korrolar(2.6) aus Vortrag 7:

$$(n-3)(2n+1)(2n-1)G_{2n}=3\sum_{p\geq 2,q\geq 2,p+q=n}(2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}$$

für $n\geq 4$. Dann können alle $G_k(\Omega)$ mit $k\geq 4$ gerade, durch $G_4(\Omega)$ und $G_6(\Omega)$ sowie reelle Faktoren dargestellt werden , sind also reell.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Alle $G_k(\Omega), k \geq 4$ gerade, sind reell. Daraus folgt $G_4(\Omega)$ und $G_6(\Omega)$ sind reell, und weiter folgt $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$ sind reell.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Von den Größen e_1, e_2, e_3 seien zwei konjugiert komplex und die dritte reell oder alle drei reell.

1. Fall: alle 3 reell, dann gilt mit Korrolar (3.3) aus Vortrag 7:

$$g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g_3 = 4e_1e_2e_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Fall: Sei o. B. d. A. $e_1 \in \mathbb{R}, e_2, e_3 \in \mathbb{C}, e_2 = a + ib, e_3 = \overline{e_2}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} g_2 &= -4(e_1(a+ib) + (a+ib)(a-ib) + (a-ib)e_1) \\ &= -4\left(ae_1 + ibe_1 + a^2 - i^2b^2 + ae_1 - ibe_1\right) \\ &= -4\left(2ae_1 + a^2 + b^2\right) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 &= 4e_1(a+ib)(a-ib) \\ &= 4e_1\left(a^2 - i^2b^2\right) \\ &= 4e_1\left(a^2 + b^2\right) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (iii)$: Seien $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$ beide reell und das reelle Polynom

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

aus Satz (3.1) aus Vortrag 7 gegeben. $\Rightarrow$ e_1, e_2, e_3 sind die Nullstellen des Polynoms $4x^3 - g_2x - g_3$. Da das Polynom Grad 3 hat, ist mindestens eine Nullstelle reell. Sei o. B. d. A. $e_1 \in \mathbb{R}$, dann muss noch gezeigt werden:

$$(x-e_2)(x-e_3) = x^2 - e_2x - e_3x + e_2e_3 = x^2 - x(e_2+e_3) + e_2e_3$$

hat reelle Koeffizienten. Das heißt: $e_2 + e_3 \in \mathbb{R}$ und $e_2e_3 \in \mathbb{R}$. Bedingung ist erfüllt für $e_2, e_3 \in \mathbb{R}$. Betrachte nun: $e_2, e_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $e_2 := u + iv, e_3 := x + iy$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow e_2 + e_3 \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad e_2 e_3 \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow u + iv + x + iy = (u + x) + i\,(v + y) \in \mathbb{R} \\
&\quad \text{und} \quad (u + iv)\,(x + iy) = (ux - vy) + i\,(uy + vx) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow v + y = 0 \quad \text{und} \quad uy + vx = 0 \\
&\Leftrightarrow v = -y \quad \text{und} \quad u = x \\
&\Leftrightarrow e_3 = \overline{e_2} \\
&\Rightarrow \text{Behauptung.}
\end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (iv)$: Seien $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$ beide reell. Dann gilt:

$$\overline{g_2(\Omega)} = \overline{60 G_4(\Omega)} = \overline{60 \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-4}} = 60 \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \overline{\omega}^{-4} = 60 \sum_{0 \neq \omega \in \overline{\Omega}} \omega^{-4} = g_2\left(\overline{\Omega}\right),$$

$$\overline{g_3(\Omega)} = \overline{140 G_6(\Omega)} = \overline{140 \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-6}} = 140 \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \overline{\omega}^{-6} = 140 \sum_{0 \neq \omega \in \overline{\Omega}} \omega^{-6} = g_3\left(\overline{\Omega}\right).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
g_2\left(\overline{\Omega}\right) &= \overline{g_2(\Omega)} \\
&= g_2(\Omega) \;\; \text{da } g_2(\Omega) \;\; \text{reell ist nach Voraussetzung,}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
g_3\left(\overline{\Omega}\right) &= \overline{g_3(\Omega)} \\
&= g_3(\Omega) \;\; \text{da } g_3(\Omega) \;\; \text{reell ist nach Voraussetzung.}
\end{aligned}$$

Da Ω durch g_2 und g_3 eindeutig bestimmt ist, folgt daraus: $\Omega = \overline{\Omega}$, also ist Ω konjugationsstabil.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Sei Ω konjugationsstabil, d. h. $\Omega = \overline{\Omega}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
g_2(\Omega) &= \overline{\overline{g_2(\Omega)}} = \overline{g_2\left(\overline{\Omega}\right)} = \overline{g_2(\Omega)} \Rightarrow g_2 \text{ reell,} \\
g_3(\Omega) &= \overline{\overline{g_3(\Omega)}} = \overline{g_3\left(\overline{\Omega}\right)} = \overline{g_3(\Omega)} \Rightarrow g_3 \text{ reell.}
\end{aligned}$$

□

§2 Die durch $\wp$ definierte Abbildung für ein Rechteck-Gitter

(2.1) Bezeichnungen
In diesem Abschnitt sei $\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ stets ein Rechteck-Gitter und

$$(\omega_1, \omega_2) \text{ eine Basis von } \Omega \text{ mit } \frac{1}{i}\omega_1 > 0 \text{ und } \omega_2 > 0.$$

◇

(2.2) Proposition
Sei $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.

a) $\wp(z)$ ist genau dann reell, wenn es ein $\omega \in \Omega$ gibt, mit

$$z \in \frac{\omega}{2} + \mathbb{R} \qquad \text{oder} \qquad z \in \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}.$$

b) Für $z \in \frac{\omega}{2} + \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, ist $\wp'(z)$ reell. Für $z \in \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, ist $\wp'(z)$ rein imaginär. ◇

Beweis
a) „$\Leftarrow$" Sei ein Gitter Ω gegeben mit Basis (ω_1, ω_2) und $\omega = z_1\omega_1 + z_2\omega_2 \in \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \Omega$. Dann gilt:

$\frac{1}{2}(\omega - \overline{\omega}) = \frac{1}{2}(z_1\omega_1 + z_2\omega_2 - z_1\omega_1 + z_2\omega_2) = \frac{1}{2}(2z_2\omega_2) = z_2\omega_2 \in 0\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \Omega$. Dann folgt:

$$\overline{\wp\left(\frac{\omega}{2} + z\right)} = \wp\left(\frac{\overline{\omega}}{2} + \overline{z}\right) = \wp\left(\frac{\overline{\omega}}{2} + \frac{1}{2}(\omega - \overline{\omega}) + \overline{z}\right) = \wp\left(\frac{\omega}{2} + \overline{z}\right)$$

sowie

$$\overline{\wp'\left(\frac{\omega}{2} + z\right)} = \wp'\left(\frac{\overline{\omega}}{2} + \overline{z}\right) = \wp'\left(\frac{\overline{\omega}}{2} + \frac{1}{2}(\omega - \overline{\omega}) + \overline{z}\right) = \wp'\left(\frac{\omega}{2} + \overline{z}\right).$$

Sei $z \in \frac{\omega}{2} + \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}$ mit $z = \frac{\omega}{2} + u$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\overline{\wp(z)} &= \overline{\wp\left(\frac{\omega}{2} + u\right)} \overset{\text{s. o.}}{=} \wp\left(\frac{\omega}{2} + \overline{u}\right) \\ &\overset{u \in \mathbb{R}}{=} \wp\left(\frac{\omega}{2} + u\right) = \wp(z) \\ &\Rightarrow \wp(z) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Sei $z \in \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}$ und $u \in i\mathbb{R}$ mit $z = \frac{\omega}{2} + u$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \overline{\wp(z)} &= \overline{\wp\left(\frac{\omega}{2} + u\right)} \overset{\text{s. o.}}{=} \wp\left(\frac{\omega}{2} + \overline{u}\right) \overset{u \in i\mathbb{R}}{=} \wp\left(\frac{\omega}{2} - u\right) \\ &= \wp\left(-\left(\frac{\omega}{2} + u\right)\right) \overset{\wp \text{ gerade}}{=} \wp\left(\frac{\omega}{2} + u\right) = \wp(z) \\ &\Rightarrow \wp(z) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

„$\Rightarrow$“ Sei $\wp(z)$ reell und $z \in \diamond(\omega_1, \omega_2)$.
Angenommen $z \notin \frac{\omega}{2} + \mathbb{R}$ und $z \notin \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \wp(\omega_1 + \overline{z}) &= \wp(\overline{z}) = \overline{\wp(z)} = \wp(z) \\ \wp(\omega_1 + \omega_2 - z) &= \wp(-z) = \wp(z) \\ \wp(\omega_2 - \overline{z}) &= \wp(-\overline{z}) = \wp(\overline{z}) = \wp(z). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\wp$ an den vier verschiedenen Punkten $z, \omega_1 + \overline{z}, \omega_1 + \omega_2 - z$ und $\omega_2 - \overline{z}$ den gleichen Wert annehmen würde. Das ist ein Wiederspruch zu Lemma (2.5) aus Vortrag 5, wo gezeigt wird, dass es genau zwei verschiedene Werte $u, v \in P$ gibt mit $\wp(u) = \wp(v) = \omega$.

b) 1.Fall: Sei $z \in \frac{\omega}{2} + \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}$ mit $z = \frac{\omega}{2} + u$. Dann gilt:

$$\overline{\wp'\left(\frac{\omega}{2} + u\right)} = \wp'\left(\frac{\omega}{2} + \overline{u}\right) = \wp'\left(\frac{\omega}{2} + u\right),$$

also ist $\wp'(z)$ reell.
2.Fall: Sei $z \in \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}$ und $u \in i\mathbb{R}$ mit $z = \frac{\omega}{2} + u$. Dann gilt:

$$\overline{\wp'\left(\frac{\omega}{2} + u\right)} = \wp'\left(\frac{\omega}{2} + \overline{u}\right) = \wp'\left(\frac{\omega}{2} - u\right) = \wp'\left(-\left(\frac{\omega}{2} + u\right)\right) = -\wp'\left(\frac{\omega}{2} + u\right),$$

also ist $\wp'(z)$ rein imaginär. $\square$

(2.3) Satz
Das Innere des Viertelrechtecks 0, $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ der $z-$Ebene wird durch $z \mapsto \omega = \wp(z)$ auf die untere ω-Halbebene biholomorph so abgebildet, daß der Rand des Rechtecks auf die reelle Achse (von $-\infty$ nach $+\infty$) bijektiv abgebildet wird. $\diamond$

Beweis
Es sei V das Innere der Viertelrechtecks. Für $z = x + iy$ mit $0 < x \leq \varepsilon, \quad 0 < y \leq \varepsilon$ mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ gilt

$$\wp(z) = z^{-2} + O\left(\varepsilon^2\right) = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + O\left(\varepsilon^2\right) = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} - i\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + O(\varepsilon^2)$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} \wp(z) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + O\left(\varepsilon^2\right) < 0.$
V ist das „Innere“ des Viertelrechtecks, dass bedeutet auch

$$z \notin \frac{\omega}{2} + \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad z \notin \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}.$$

Daraus folgt dann $\wp(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit Proposition (2.2). Da V zusammenhängend ist, ist auch $\wp(V)$ zusammenhängend. Nun gilt für alle $z \in V$ das $\operatorname{Im} \wp(z) < 0$ ist. Daraus folgt: $\wp(V) \subset H$ mit $H := \{\omega \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \omega < 0\}$.

Wegen
$$\wp\left(z + \frac{\omega}{2}\right) = \wp\left(-\left(z + \frac{\omega}{2}\right)\right) = \wp\left(-z - \frac{\omega}{2}\right) = \wp\left(-z + \frac{\omega}{2}\right)$$
folgt mit $z \in V$:
$$\wp\left(\frac{\omega_3}{2} + z\right) = \wp\left(\frac{\omega_3}{2} - z\right) \in \wp(V).$$
Da $z \in V$ ist gilt auch:

$$\wp\left(\frac{\omega_3}{2} + V\right) = \wp\left(\frac{\omega_3}{2} - V\right) \subset \wp(V).$$

Definiere nun eine Abbildung $f : \frac{\omega_3}{2} + V \to V, \frac{\omega_3}{2} + z \mapsto \frac{\omega_3}{2} - z$, dann ist f bijektiv. Daraus folgt die Gleichheit:

$$\wp\left(\frac{\omega_3}{2} + V\right) = \wp(V).$$

Dann gilt weiter:

$$\wp\left(\frac{\omega_3}{2} + V\right) = \wp(V) \subset H;$$
$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2} + V\right) = \wp\left(\frac{\omega_2}{2} + V\right) \subset \overline{H} := \{\omega \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \omega > 0\} = \mathbb{H};$$

so daß die Gleichheit $\wp(V) = H$ aus der Proposition (2.2) und Satz (1.9) aus Vortrag 5 folgt. Nach Lemma (2.4) aus Vortrag 5 hat man $\wp'(z) \neq 0$ für alle $z \in V$. Jetzt folgt mit §2, Satz(2.11) aus der Analysis IV, das $\wp : V \to \mathbb{H}$ biholomorph ist.

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist $f(y) := \wp(iy)$, mit $0 < y \leq \varepsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(y) = \wp'(iy) &\overset{\text{Laurentreihe}}{=} -2(iy)^{-3} + 6G_4 iy + 20G_6(iy)^3 \\ &= -2i^{-3}y^{-3} + O(\varepsilon) = 2y^{-3} + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

also $0 < f'(y)$, und damit sicher monoton wachsend. Aus der Differentialgleichung $\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$ und $\wp'(iy) \neq 0$ erhält man $0 < f'(y)$ für $0 < y < \frac{\omega_1}{2i}$. Also ist f auf dem Intervall $[0, \frac{\omega_1}{2i}]$streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf $[-\infty, e_1]$ ab. Auf der anderen Seite von V schließt man ähnlich. □

(2.4) Folgerung
Mit dem Satz kann man jetzt auch gewisse Integrale der Form

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - gt - h}}$$

mit $g, h \in \mathbb{R}$ „berechnen“: Hat man zu g und h ein Rechteck-Gitter Ω mit $g = g_2(\Omega)$ und $h = g_3(\Omega)$ gefunden, dann gilt für $0 < r < s < \frac{\omega_2}{2}$ und $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g\wp(z) - h$ aus Satz (2.2) aus Vortrag 7:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\wp(s)}^{\wp(r)} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - gh - h}} &\overset{t=\wp(z)}{=} \int\limits_s^r \frac{1}{\sqrt{4\wp^3(z) - g\wp(z) - h}} \wp'(z)\, dz \\ = -\int\limits_s^r \frac{\wp'(z)}{\wp'(z)} dz &= \int\limits_r^s 1 dz = s - r. \end{aligned}$$

◇

§3 Homogenität und Basiswechsel

(3.1) Lemma
Mit Ω ist natürlich auch $\lambda\Omega$ für jedes $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

a) $\wp_{\lambda\Omega}(\lambda z) = \lambda^{-2}\wp_\Omega(z)$,

b) $G_k(\lambda\Omega) = \lambda^{-k}G_k(\Omega), k \geq 3$,

c) $g_2(\lambda\Omega) = \lambda^{-4}g_2(\Omega)$,

d) $g_3(\lambda\Omega) = \lambda^{-6}g_3(\Omega)$,

e) $\Delta(\lambda\Omega) = \lambda^{-12}\Delta(\Omega)$,

f) $j(\lambda\Omega) = j(\Omega)$. ◇

Beweis

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\wp_{\lambda\Omega}(\lambda z) &= (\lambda z)^{-2} + \sum_{0\neq\omega\in\lambda\Omega}\left((\lambda z-\omega)^{-2}-\omega^{-2}\right)\\
&= (\lambda z)^{-2} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega}\left((\lambda z-\lambda\omega)^{-2}-(\lambda\omega)^{-2}\right)\\
&= (\lambda z)^{-2} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega}\left(\lambda^{-2}(z-\omega)^{-2}-\lambda^{-2}\omega^{-2}\right)\\
&= \lambda^{-2}\left(z^{-2} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega}\left((z-\omega)^{-2}-\omega^{-2}\right)\right)\\
&= \lambda^{-2}\wp_{\Omega}(z).
\end{aligned}$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
G_k(\lambda\Omega) = \sum_{0\neq\omega\in\lambda\Omega}\omega^{-k} &= \sum_{0\neq\omega\in\Omega}(\lambda\omega)^{-k} = \sum_{0\neq\omega\in\Omega}\lambda^{-k}\omega^{-k}\\
&= \lambda^{-k}\sum_{0\neq\omega\in\Omega}\omega^{-k} = \lambda^{-k}G_k(\Omega), k\geq 3.
\end{aligned}$$

c) Es gilt:

$$g_2(\lambda\Omega) = 60G_4(\lambda\Omega) \overset{\text{mit b}}{=} 60\lambda^{-4}G_4(\Omega) = \lambda^{-4}g_2(\Omega).$$

d) Es gilt:

$$g_3(\lambda\Omega) = 140G_6(\lambda\Omega) \overset{\text{mit b}}{=} 140\lambda^{-6}G_6(\Omega) = \lambda^{-6}g_3(\Omega).$$

e) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda\Omega) &= g_23(\lambda\Omega) - 27g_32(\lambda\Omega) = \left(\lambda^{-4}g_2(\Omega)\right)3 - 27\left(\lambda^{-6}g_3(\Omega)\right)2\\
&= \lambda^{-12}g_2^3(\Omega) - 27\lambda^{-12}g_3^2(\Omega) = \lambda^{-12}\left(g_2^3(\Omega)-27g_3^2(\Omega)\right) = \lambda^{-12}\Delta(\Omega).
\end{aligned}$$

f) Es gilt:

$$\begin{aligned} j(\lambda\Omega) &= \frac{(12g_2(\lambda\Omega))\,3}{\Delta(\lambda\Omega)} = \frac{\left(12\lambda^{-4}g_2(\Omega)\right)3}{\lambda^{-12}\Delta(\Omega)} = \frac{\lambda^{-12}(12g_2(\Omega))^3}{\lambda^{-12}\Delta(\Omega)} \\ &= \frac{(12g_2(\Omega))\,3}{\Delta(\Omega)} = j(\Omega)\,. \end{aligned}$$

□

(3.2) Satz
Für Gitter Ω und Ω' in $\mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) Es gibt ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Omega' = \lambda\Omega$.

(ii) $j(\Omega') = j(\Omega)$. ◇

Beweis
$(i) \Rightarrow (ii)$: Gibt es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Omega' = \lambda\Omega$, so folgt $j(\Omega') = j(\lambda\Omega) = j(\Omega)$ nach (3.1), was die Behauptung beweist.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei zunächst $j(\Omega') = j(\Omega) = 0$. Dann gilt $g_2(\Omega) = g_2(\Omega') = 0$ und $g_3(\Omega), g_3(\Omega') \neq 0$. Also existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} &g_2\left(\lambda\Omega'\right) = \lambda^{-4}g_2\left(\Omega'\right) = 0 = g_2(\Omega) \text{ und} \\ &g_3(\Omega) = \lambda^{-6}g_3(\Omega') = g_3(\lambda\Omega)\,. \end{aligned}$$ □

Daraus folgt die Behauptung.

(3.3) Bemerkung
Ist (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω, so schreibt man auch

$$\wp(z;\omega_1,\omega_2) := \wp_\Omega(z) \quad \text{und} \quad G_k(\omega_1,\omega_2) = G_k(\Omega) \quad \text{für} \quad k \geq 3.$$

Da aber $\wp$ und die G_k nur vom Gitter Ω und nicht von der Wahl einer Basis abhängen, ergibt das Basis-Lemma (3.1) aus Vortrag 3 sofort

$$\wp\left(z;\omega_1',\omega_2'\right) = \wp(z;\omega_1,\omega_2) \quad \text{und} \quad G_k\left(\omega_1',\omega_2'\right) = G_k(\omega_1,\omega_2)$$

für $k \geq 3$ und

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \text{ mit } U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{Z})\,,$$

also für

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 \quad \text{und} \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = \pm 1.$$

Für $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ hat dann

$$\wp_{\lambda\Omega}(\lambda z) = \lambda^{-2}\wp_{\Omega}(z) \qquad \text{und} \qquad G_k(\lambda\Omega) = \lambda^{-k}G_k(\Omega), k \geq 3$$

auch die Form

$$\wp(\lambda z; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-2}\wp(z;\omega_1,\omega_2) \qquad \text{und} \qquad G_k(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-k}G_k(\omega_1,\omega_2),$$

$k \geq 3$. ◇

(3.4) Bemerkung
Als Basis von Ω sind ω_1, ω_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig, das heißt $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$. Da mit (ω_1, ω_2) auch $(\omega_1, -\omega_2)$ eine Basis von Ω ist, darf man ohne Einschränkung $\operatorname{Im}\tau > 0$ annehmen. Man beachte, daß dies genau dann der Fall ist, wenn das Dreieck $(0, \omega_2, \omega_1)$ positiv orientiert ist. Es folgt:

$$\wp(z, \omega_1, \omega_2) = \wp\left(\omega_2 \frac{z}{\omega_2}, \omega_2 \frac{\omega_1}{\omega_2}, \omega_2\right) = \omega_2^{-2}\wp\left(\frac{z}{\omega_2}, \tau, 1\right)$$

und

$$G_k(\omega_1, \omega_2) = G_k\left(\omega_2\frac{\omega_1}{\omega_2}, \omega_2\right) = \omega_2^{-k}G_k(\tau, 1) \text{ für } k \geq 3.$$

Zur Untersuchung von elliptischen Funktionen bezüglich Ω darf man also ohne wesentlichen Einschränkungen $\omega_2 = 1$, also

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \text{ mit } \tau \in \mathbb{H}$$

annehmen. Dabei ist die obere Halbebende $\mathbb{H}$ definiert durch

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C}; Im\tau > 0\}.$$

Wegen

$$\tau' = \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2} = \frac{a\omega_2\tau + b\omega_2}{c\omega_2\tau + d\omega_2} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

und

$$\operatorname{Im}\tau' = \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2} Im\tau$$

darf man dann aber beim Übergang von der Basis $(\tau, 1)$ von Ω zur Basis $(\tau', 1)$ von $\frac{1}{c\tau + d}\Omega$ mit $\tau' \in \mathbb{H}$ nur noch Matrizen $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$, also $ad - bc = 1$, zulassen. ◇

(3.5) Satz
Sei eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus der speziellen linearen Gruppe über $\mathbb{Z}$, also $ad - bc = 1$ gegeben. Weiter sei $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$ und $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Beim Übergang von der Basis $(\tau, 1)$ von Ω zur Basis $(\tau', 1)$ von $\frac{1}{c\tau+d}\Omega$ mit $\tau' \in \mathbb{H}$ gilt:

$$\wp\left(\frac{z}{c\tau+d}; \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, 1\right) = (c\tau+d)^2 \cdot \wp(z; \tau, 1)$$

bzw.

$$G_k\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, 1\right) = (c\tau+d)^k \cdot G_k(\tau, 1) \text{ für } k \geq 4.$$

◇

Beweis
Mit den Bemerkungen (3.3) und (3.4) gilt $\wp(z; \omega_1, \omega_2) := \wp_\Omega(z)$ und $\wp_{\lambda\Omega}(\lambda z) = \lambda^{-2}\wp_\Omega(z)$, daraus folgt:

$$\wp_{\frac{1}{c\tau+d}\Omega}\left(\frac{z}{c\tau+d}\right) = \wp\left(\frac{z}{c\tau+d}; \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, 1\right) = (c\tau+d)^2 \cdot \wp(z; \tau, 1) = \wp_\Omega(z).$$

Mit $G_k(\omega_1, \omega_2) = G_k(\Omega)$ und $G_k(\lambda\Omega) = \lambda^{-k}G_k(\Omega), k \geq 3$ folgt dann weiter:

$$G_k\left(\frac{1}{c\tau+d}\Omega\right) = G_k(\tau', 1) = G_k\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, 1\right) = (c\tau+d)^k \cdot G_k(\tau, 1) = (c\tau+d)^k \cdot G_k(\Omega).$$

□

Dabei sind $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, und es gilt $ad - bc = 1$.