Die Differentialgleichungen

Vortrag zum Seminar „Elliptische Funktionen und elliptische Kurven“, 07.12.2005

Tobias Bartels

Sei Ω stets ein Gitter in $\mathbb{C}$.

§ 1 Die LAURENT-Entwicklung

In diesem Paragraph soll die LAURENT-Entwicklung der $\wp$-Funktion gegeben werden.
Wir betrachten zunächst erneut die EISENSTEIN Reihe wie in Vortrag 4, Korollar (3.6),

$$G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-k} \quad \text{für alle } k \geq 4. \tag{1}$$

Nach Vortrag 4, (3.5), sind die G_k für ungerades $k \geq 4$ gleich Null. Wir definieren

$$\gamma := \gamma(\Omega) := min\{|\omega|, 0 \neq \omega \in \Omega\}.$$

Wir erhalten einen Zusammenhang zwischen der WEIERSTRASSschen $\wp - \mathit{Funktion}$ und den EISENSTEIN-Reihen.

(1.1) Satz
Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < \gamma(\Omega)$ gilt

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) G_{2n} \cdot z^{2n-2} = z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 \cdots . \tag{2}$$ ◇

Beweis
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < \gamma(\Omega)$. Dann gilt $\frac{|z|}{|\omega|} < 1$ für alle $0 \neq \omega \in \Omega$.
Zunächst gilt aufgrund von

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt} \frac{1}{(1-t)} = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot t^{m-1} \quad \text{für } |t| < 1$$

und für $0 \neq \omega \in \Omega$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \overset{(z-\omega)^2 = \omega^2 (1-\frac{z}{\omega})^2}{=} \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{(1-\frac{z}{\omega})^2} - 1 \right) = \frac{1}{\omega^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(m \left(\frac{z}{\omega} \right)^{m-1} \right) - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{\omega^2} \sum_{m=2}^{\infty} m \left(\frac{z}{\omega}\right)^{m-1} = \sum_{m=2}^{\infty} m \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} .$$

Daher folgt nach dem Konstruktionssatz für die $\wp$-Funktion

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \sum_{m=2}^{\infty} m \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \quad \text{für } 0 < |z| < \gamma. \tag{3}$$

Wegen

$$\left| m \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right| = m \frac{|z|^{m-1}}{|\omega|^{m-2}} |\omega|^{-3} \leq m \frac{|z|^{m-1}}{\gamma^{m-1}\gamma^{-1}} |\omega|^{-3} = \underbrace{m\gamma \left(\frac{|z|}{\gamma}\right)^{m-1}}_{<\mathrm{c} \quad , \quad \mathrm{c\ geeignet}} \cdot |\omega|^{-3}$$

und aufgrund des Konvergenz-Lemmas[1] (3.4) aus Vortrag 4 ist die Reihe (3) in m und ω absolut konvergent. Nach Vortrag 4, Satz (2.2)[2], darf man demnach umordnen und erhält

$$\begin{aligned}
\wp(z) \quad &= \quad z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \sum_{m=2}^{\infty} m \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \\
&\overset{\text{umordnen}}{=} z^{-2} + \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot z^{m-1} \underbrace{\sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \frac{1}{\omega^{m+1}}}_{=G_{m+1}} \\
&= \quad z^{-2} + \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot z^{m-1} G_{m+1}.
\end{aligned}$$

Für m gerade, also $m = 2n$, ist $G_{m+1} = 0$ nach Vortrag 4, Proposition (3.7). Für ungerades m ist $m+1$ gerade. Setze also $m+1 = 2n$. Damit ergibt sich

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) \cdot G_{2n} \cdot z^{2n-2}, \qquad 0 < |z| < \gamma,$$

und man erhält (2). □

[1] Die Reihe $\sum_{0 \neq \omega \in \Omega} |\omega|^{-\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 2$.
[2] Eine absolut konvergente Reihe darf beliebig umgeordnet werden.

§ 2 Die zweite Differentialgleichung

In Vortrag 5 haben wir eine Differentialgleichung der WEIERSTRASSsche $\wp - Funktion$ kennen gelernt. Nun wollen wir zeigen, dass die WEIERSTRASSsche $\wp - Funktion$ einer zweiten Differentialgleichung genügt und einige Folgerungen daraus ziehen.

Wir verwenden folgende

(2.1) Bezeichnungen

a.) Im folgenden definieren wir

$$g_2 := g_2(\Omega) := 60G_4(\Omega) \quad \text{und} \quad g_3 := g_3(\Omega) := 140G_6(\Omega). \tag{4}$$

Man nennt g_2 und g_3 die WEIERSTRASS-Invarianten des Gitters Ω.

b.) Wir verwenden das LANDAU-Symbol und schreiben $\mathcal{O}(z^k)$ für eine Funktion $f(z)$, die $|f(z)| \leq C \cdot |z|^k$ mit einem geeignetem C für z aus einer Umgebung von 0 erfüllt. ◇

Wir erhalten eine zweite Differentialgleichung

(2.2) Satz

Die WEIERSTRASSsche $\wp - Funktion$ genügt der Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \tag{5}$$ ◇

Beweis

Nach Satz (1.1) gilt für alle $0 < |z| < \gamma(\Omega)$

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-2}.$$

Weil $\sum_{n=4}^{\infty}(2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-2}$ in einer Umgebung von 0

$$\left| \sum_{n=4}^{\infty} (2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-2} \right| \leq C \cdot |z|^6$$

erfüllt, gilt für $0 < |z| < \gamma(\Omega)$ mit (2.1) b)

$$\wp(z) = z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \mathcal{O}(z^6).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\wp^2(z) &= z^{-4} + 6G_4 + 10G_6z^2 + \mathcal{O}(z^3),\\
\wp^3(z) &= z^{-6} + 9G_4z^{-2} + 15G_6 + \mathcal{O}(z),\\
\wp'(z) &= -2z^{-3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + O(z^5),\\
\wp'^2(z) &= 4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + O(z).
\end{aligned}$$

Als Beispiel wie sich diese $\wp^2, \wp^3, \wp', \wp'^2$ berechnen wird hier exemplarisch $\wp^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\wp^2(z) &= \wp(z) \cdot \wp(z)\\
&= (z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \mathcal{O}(z^6)) \cdot (z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \mathcal{O}(z^6))\\
&= z^{-4} + 6G_4 + 10G_6z^2 + \underbrace{9G_4^2z^4 + 30G_4z^6 + 25G_6^2z^8}_{=\mathcal{O}(z^3)}\\
&= z^{-4} + 6G_4 + 10G_6z^2 + \mathcal{O}(z^3).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3\\
&= 4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + \mathcal{O}(z) - 4(z^{-6} + 9G_4z{-}2 + 15G_6 + \mathcal{O}(z))\\
&\quad +60G_4(z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \mathcal{O}(z^6)) + 140G_6\\
&= 4z^{-6} - 24G_4z^{-2} - 80G_6 + \mathcal{O}(z) - 4z^{-6} - 36G_4z^{-2} - 60G_6 + \mathcal{O}(z)\\
&\quad +60G_4z^{-2} + 180G_4^2z^2 + 300G_4G_6z^4 + \mathcal{O}(z^6) + 140G_6\\
&= 180G_4z^2 + 300G_4G_6z^4 + \mathcal{O}(z^6) + \mathcal{O}(z)\\
&= 180G_4z^2 + 300G_4G_6z^4 + \mathcal{O}(z)\\
&= \mathcal{O}(z), \quad 0 < |z| < \gamma. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Hier gehört die linke Seite zu $\mathcal{K}(\Omega)$ und hat Pole höchstens dort, wo $\wp$ oder $\wp'$ Pole haben. Wir sehen aber in den Rechnungen von (6), dass die linke Seite in einer Umgebung von 0 holomorph ist. Da die linke Seite zu $\mathcal{K}(\Omega)$ folgt, dass diese dann in ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. Nach Vortrag 5, Satz von LIOUVILLE[3] (1.1), ist die Funktion daher konstant. Nach (6) wiederum ist diese Konstante gleich Null, also

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3 \equiv 0.$$

□

[3]Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ holomorph, dann ist f konstant

Wir erhalten eine weitere Differentialgleichung

(2.3) Korollar
Es gilt

$$2\wp'' = 12\wp^2 - g_2.$$

Beweis
Differenziert man (3) so folgt

$$(\wp'^2)' = (4\wp^3 - g_2\wp - g_3)' \iff 2\wp' \cdot \wp'' = 12\wp^2 \cdot \wp' - g_2\wp' \iff 2\wp'' = 12\wp^2 - g_3.$$

□

Für die WEIERSTRASSsche $\wp - $*Funktion* und deren Ableitungen gilt das

(2.4) Korollar
Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\wp^{(k)} \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'$. ◇

Beweis
Beweis durch Induktion:
(I.A.)Es gilt für $k = 0$

$$\wp^{(0)} = \wp \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'.$$

Weiterhin wissen wir für $k = 1$

$$\wp' \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'.$$

Nach Korollar (2.3) gilt für $k = 2$

$$\wp'' = 6\wp^2 - 30G_4 \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'.$$

(I.V.) Sei die Behauptung also richtig für ein $k \in \mathbb{N}$.
(I.S.) Damit erhalten wir

$$\wp^{(k+1)} = (\wp^k)' \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp',$$

denn nach (I.V.) ist zunächst $\wp^k \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'$.
Also ist

$$\wp^{k+1} = (\wp^k)' \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp' + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp''.$$

Nach (I.A.) ist aber widerrum $\wp'' \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'$ darstellbar.
Also damit auch

$$\wp^{(k+1)} \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'.$$

□

Für elliptische Funktionen bezüglich Ω gilt folgende Äquivalenz.

(2.5) Korollar
Für $f \in K(\Omega)$ sind äquivalent:

i) f ist holomorph in $\mathbb{C}\backslash\Omega$.

ii) $f \in \mathbb{C}[\wp] + \mathbb{C}[\wp] \cdot \wp'$. ◇

Beweis
„i)⇒ii)“ Subtrahiert man $\alpha\wp^n$ bzw. $\alpha\wp^n \cdot \wp', \alpha \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0$ geeignet von f, so kann man die Ordnung der Pole in den Gitterpunkten sukzessiv erniedrigen indem man den Exponenten der Polstelle betrachtet. Das heisst bei einer Polstelle mit geradem Exponenten subtrahiert man die Funktion mit $\alpha\wp^n = \alpha(z^{-2} + \cdots)^n = \alpha z^{-2n} + \cdots$ $\alpha \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0$ geeignet und erniedrigt damit die Ordnung der Polstelle mit geradem Exponenten. Entsprechend bei einer Polstelle mit ungeradem Exponenten subtrahiert man die Funktion mit $\alpha\wp^n \cdot \wp' = \alpha(z^{-2} + \cdots)^n \cdot (-2z^{-3} + \cdots) = \alpha z^{-2n-3} + \cdots, \alpha \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0$ geeignet, und erniedrigt damit die Ordnung der Polstelle mit ungeradem Exponenten. Nach endlich vielen Schritten bricht dieser Algorithmus ab. Schließlich beachte man noch, dass nach Vortrag 5, Satz von LIOUVILLE (1.6)[4], $res_0 f = 0$. Also hat ein solches f mindestens einen Pol 2. Ordnung. Auf diese Weise erhält man ein $g \in \mathbb{C}[\wp] + \mathbb{C}[\wp]\wp'$ mit $f - g$ ist holomorph in Null. Wegen $f - g \in \mathcal{K}(\Omega)$ und f holomorph in $\mathbb{C}\backslash\Omega$ ist $f - g$ dann eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}$. Nach Vortrag 5, Satz von LIOUVILLE (1.1), existiert daher ein $a \in \mathbb{C}$ mit
$f - g \equiv a \iff f = g + a \in \mathbb{C}[\wp] + \mathbb{C}[\wp]\wp'$.
$\Rightarrow f \in \mathbb{C}[\wp] + \mathbb{C}[\wp] \cdot \wp'$
„ii)⇒i)“ Sei $f \in \mathbb{C}[\wp] + \mathbb{C}[\wp] \cdot \wp'$, so folgt direkt, dass f holomorph in $\mathbb{C}\backslash\Omega$ ist, weil $\wp$ und $\wp'$ nur Pole in Ω haben und $D_{\wp\cdot\wp} \subset D_\wp$ sowie $D_{\wp+\wp\cdot\wp'} \subset D_\wp \cup D_{\wp'}$ gilt. □

[4]Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und P ein Periodenparrallelogram, dann gilt $\sum_{c\in P} res_c f = 0$

Aus Korollar (2.3) und der LAURENT-Reihe aus Satz (1.1) erhalten wir

(2.6) Korollar
Für $n \geq 4$ gilt die Rekursionsformel

$$(n-3)(2n+1)(2n-1)G_{2n} = 3 \cdot \sum_{p \geq 2,\, q \geq 2,\, p+q=n} (2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}. \qquad (7) \quad \diamond$$

Beweis
Man trägt die LAURENT-Reihe (2) in $\wp'' + 30G_4 = 6\wp^2$ nach dem Korollar (2.3) ein und erhält für die linke Seite

$$\begin{aligned} &30G_4 + \wp'' \\ &= 30G_4 + \left(z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-2}\right)'' \\ &= 30G_4 + 6z^{-4} + \sum_{n\geq 2}(2n-1)(2n-2)(2n-3)G_{2n} \cdot z^{2n-4}. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite gilt andererseits

$$\begin{aligned} &6\wp^2 \\ &= 6 \cdot \left(z^{-2} + \sum_{n\geq 2}(2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-2}\right)^2 \\ &= 6z^{-4} + 6 \cdot 2 \cdot z^{-2} \cdot \left(\sum_{n\geq 2}(2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-2}\right) + 6 \cdot \left(\sum_{n\geq 2}(2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-2}\right)^2 \\ &= 6z^{-4} + 12 \cdot \sum_{n\geq 2}(2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-4} + 6 \cdot \sum_{p\geq 2}\sum_{q\geq 2}(2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}z^{2p+2q-4}. \end{aligned}$$

Stellt man nun um und teilt die Gleichung durch 2, so folgt

$$\begin{aligned} &15G_4 + 3z^{-4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}(2n-1)(2n-2)(2n-3)G_{2n} \cdot z^{2n-4} \\ &-3z^{-4} - 6 \cdot \sum_{n\geq 2}(2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-4} \\ &= 3 \cdot \sum_{p\geq 2}\sum_{q\geq 2}(2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}z^{2p+2q-4}. \end{aligned}$$

Fasst man nun die linke Seite zusammen so erhält man

$$\begin{aligned}
&15G_4 + \sum_{n\geq 2}\left[\frac{1}{2}(2n-1)(2n-2)(2n-3) - 6(2n-1)\right] G_{2n}\cdot z^{2n-4}\\
&= \sum_{n\geq 4}\left[\frac{1}{2}(2n-1)(2n-2)(2n-3) - 6(2n-1)\right] G_{2n}\cdot z^{2n-4}\\
&= \sum_{n\geq 4}(2n-1)\left[(n-1)(2n-3)-6\right] G_{2n}\cdot z^{2n-4}\\
&= \sum_{n\geq 4}(2n-1)(n-3)(2n+1)G_{2n}\cdot z^{2n-4}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\sum_{n\geq 4}(2n-1)(n-3)(2n+1)G_{2n}\cdot z^{2n-4} = 3\cdot\sum_{p\geq 2}\sum_{q\geq 2}(2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}z^{2p+2q-4}.$$

Für $p+q=n$ folgt mittels Koeffizientenvergleich damit die Behauptung

$$(n-3)(2n+1)(2n-1)G_{2n} = 3\cdot\sum_{p\,\geq\,2,\;q\,\geq\,2,\;p+q\,=\,n}(2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}.$$

□

Wir können mit Hilfe der Rekursionsformel (7) nun EISENSTEIN Reihen in Abhängigkeit von G_4 und G_6 darstellen.

(2.7) Bemerkung

Setzt man nun ein spezielles $n\geq 4$ in (7) ein so erhält man für $n=4$

$$7G_8 = 3G_4^2,$$

denn

$$\begin{aligned}
&(4-3)(2\cdot 4+1)(2\cdot 4-1)G_{2\cdot 4} = 3\cdot\sum_{p\,\geq\,2,\;q\,\geq\,2,\;p+q\,=\,4}(2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}\\
\iff\quad & 63G_8 = 27G_4^2\\
\iff\quad & 7G_8 = 3G_4^2.
\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für $n=5$

$$198G_{10} = 90G_4G_6 \iff 11G_{10} = 5G_4G_6$$

sowie für $n=6$

$$429G_{12} = 126G_4G_8 + 75G_6^2 \iff 143G_{12} = 42G_4G_8 + 25G_6^2 = 18G_4^3 + 25G_6^2.$$

◇

Allgemein können wir nun formulieren

(2.8) Korollar
Für $k \geq 8$ gilt $G_k \in \mathbb{Q}[G_4, G_6]$. $\diamond$

Beweis
Für k ungerade ist die Reihe gleich Null. Daher betrachte nur gerade $k = 2n,\ n \geq 4$.

i) Nach Korollar (2.6) hat man

$$(n-3)(2n+1)(2n-1)G_{2n} = 3 \cdot \sum_{p\,\geq\,2,\ q\,\geq\,2,\ p+q\,=\,n} (2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}.$$

Teilt man nun durch $(n-3)(2n+1)(2n-1) \neq 0$ für alle $n \geq 4$ so folgt

$$G_{2n} = 3 \cdot \sum_{p\,\geq\,2,\ q\,\geq\,2,\ p+q\,=\,n} \underbrace{\frac{\overbrace{(2p-1)(2q-1)}^{\in\mathbb{N}}}{\underbrace{(n-3)(2n+1)(2n-1)}_{\in\mathbb{N}}}}_{\in\mathbb{Q}} G_{2p}G_{2q}.$$

ii) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion:
(I.A.)Die Behauptung ist für G_8 , G_{10} , G_{12} und G_{14} richtig
(I.V.) Es gelte $G_{2j} \in \mathbb{Q}[G_4, G_6]\ \forall\, j \in \{2, \cdots, n-1\}$ für ein $n-1 \in \mathbb{N}$.
(I.S.) Zeige: $G_{2n} \in \mathbb{Q}[G_4, G_6]$.
Nach i.) genügt es zu zeigen, dass $G_{2p}, G_{2q} \in \mathbb{Q}[G_4, G_6]$ für $p \geq 2, q \geq 2$ und $p + q = n$.
Für $p \geq 2, q \geq 2\ \wedge\ p + q = n$ gilt $p, q \in \{2, 3, \cdots, n-2\}$, mit der (I.V.) folgt daher

$$G_{2p}, G_{2q} \in \mathbb{Q}[G_4, G_6].$$ $\square$

Für Lösungen der Differentialgleichung (3) gilt das

(2.9) Korollar
Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit zugehörigen WEIERSTRASS-Invarianten g_2 und g_3. Jede in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ meromorphe, nicht-konstante Lösung f der Differentialgleichung $f' = 4f^3 - g_2 f - g_3$ wird durch $f(z) = \wp(z + w)$, $z \in G$, mit geeignetem $w \in \mathbb{C}$ gegeben. Ist $f \in \mathcal{M}$[5] eine solche Lösung, dann ist Ω das Periodengitter von f. Das Gitter Ω ist durch $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$, also auch durch $G_4(\Omega)$ und $G_6(\Omega)$ eindeutig bestimmt. $\diamond$

[5] $\mathcal{M}$ bezeichne die Menge der meromorphen Funktionen.

Beweis
Sei f eine in G meromorphe, nicht konstante Lösung der angegeben Differentialgleichung. Weiter sei f in einer Kreisscheibe $U \subset G$ um u holomorph. Da f nicht konstant ist wähle U weiterhin so, dass $f' \neq 0$ in U. Dann gilt bei geeigneter Wahl der Wurzel $f' = \sqrt{4f^3 - g_2 f - g_3}$. Nach Vortrag 5, Lemma (2.5), wählt man nun $w \in \mathbb{C}$ mit $\wp(w+u) = f(u)$. Nach (5) gilt

$$\begin{aligned} \wp'^2(w+u) &= 4\wp^3(w+u) - g_2\wp(w+u) - g_3 \\ &\overset{\wp(w+u)=f(u)}{=} 4f^3(u) - g_2 f(u) - g_3 = f'^2(u) \\ \iff \quad \wp'^2(w+u) &= f'(u)^2 \\ \iff \quad \wp'(w+u) &= \pm f'(u). \end{aligned}$$

O.B.d.A. nehmen wir $\wp'(w+u) = f'(u)$ an. Gilt $\wp'(w+u) = -f'(u)$, so ersetze w durch $-w-2u$. Denn $\wp'$ ist eine ungerade Funktion und man erhält

$$\begin{aligned} &\wp'(-w-2u+u) = \wp'(-w-u) = -\wp'(w+u) = f'(u) \\ \iff &\wp'(w+u) = -f(u) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\wp(-w-2u+u) = \wp(-w-u) \overset{\wp \text{ gerade}}{=} \wp(w+u) = f(u) \\ \iff &\wp(w+u) = f(u). \end{aligned}$$

Die Funktionen $f(z)$ und $\wp(z+w)$ genügen also der gleichen Differentialgleichung 1. Ordnung (5) und stimmen im Punkt u überein. Daraus folgt, dass die Funktionen auf der Umgebung U wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes gleich sind. Der Identitätssatz impliziert $f(z) = \wp(z+w)$ für alle $z \in G$. Die fehlende Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass für die $\wp$-Funktion die Periodenmenge gleich Ω ist.□

(2.10) Bemerkung
An Stelle der Differentialgleichung (3) kann man bei gegebener rationaler Funktion R allgemeiner nach Lösungen $\omega = f(z)$ der sog. *binomischen Differentialgleichung*

$$(\omega')^n = R(z, \omega) \tag{8}$$

für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ fragen. ◇

Ohne Beweis betrachten wir den
(2.11) Satz von Malmquist und Yosida
Besitzt (7) eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe und tranzendente Lösung, dann ist $R(z,\omega)$ ein Polynom in ω vomGrad$\geq 2n$. ◇

§3 Ein Vergleich der Differentialgleichungen

In Vortrag 5 hatten wir die erste Differentialgleichung und im zweiten Paragraphen die zweite Differentialgleichung kennen gelernt. In diesem Paragraphen wollen wir beide Differentialgleichungen miteinander vergleichen.
Neben

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{9}$$

war in Vortrag 5 die Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3) \tag{10}$$

hergeleitet worden. Dabei seien $e_1,\ e_2,\ e_3$ wie in Vortrag 5 durch

$$e_k = \wp(\omega_k/2)\ ,\ k \in \{1,2,3\}\ ,\ \omega_3 := \omega_1 + \omega_2 \tag{11}$$

definiert, wenn (ω_1, ω_2) eine Basis des Gitters Ω ist. Da $\wp$ mehr als drei verschiedene Werte annimmt, ergibt ein Vergleich für eine Unbestimmte X über $\mathbb{C}$ den

(3.1) Satz
Es gilt

$$4X^3 - g_2X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3).$$

Aus Vortrag 6, Korollar (1.2), folgt dann ein weiteres

(3.2) Korollar
Für über $\mathbb{C}$ unabhängige Unbestimmte X, Y gilt

$$K(\Omega) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/I(X,Y),$$

wenn $I(X,Y)$ das von $Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3$ in $\mathbb{C}(X)[Y]$ erzeugte Hauptideal bezeichnet. ◇

Ein Koeffizientenvergleich in Satz (3.1) ergibt das

(3.3) Korollar

$$0 = e_1 + e_2 + e_3, \tag{12}$$

$$g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \tag{13}$$

$$g_3 = 4e_1e_2e_3. \tag{14}$$

◇

Beweis
Es gilt

$$\begin{aligned}
&4X^3 - g_2X - g_3 \\
&= 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3) \\
&= 4(X^2 - e_1X - e_2X + e_1e_2)(X-e_3) \\
&= 4(X^3 - e_1X^2 - e_2X^2 - e_3X^2 + e_1e_2X + e_2e_3X + e_3e_1X - e_1e_2e_3) \\
&= 4X^3 - 4(e_1+e_2+e_3)X^2 + 4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)X - 4e_1e_2e_3.
\end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich folgt dann

$$0 = e_1 + e_2 + e_3\,, \qquad g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)\,, \qquad g_3 = 4e_1e_2e_3\,,$$

also die Behauptung. □

Für die WEIERSTRASS-Invarianten gilt folgendes

(3.4) Korollar

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2 \neq 0. \tag{15}$$ ◇

Beweis
Mit (12) und (13) erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
g_2 &= -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) \\
&\underbrace{=}_{(12)} -4(e_1(-e_1-e_3) + e_3(-e_1-e_3) + e_1e_3) \\
&= -4(-e_1^2 - e_1e_3 - e_1e_3 - e_3^2 + e_3e_1) \\
&= 4(e_1^2 + e_3^2 + e_1e_3) \\
&\underbrace{=}_{(12)} 4(e_1^2 + e_3^2 + (-e_2-e_3)(-e_2-e_1)) \\
&= 4(e_1^2 + e_3^2 + e_2^2 + e_2e_1 + e_2e_3 + e_1e_3) \\
&= 4(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \underbrace{4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)}_{=-g_2}
\end{aligned}$$

und damit

$$2g_2 = 4(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \iff g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2).$$

Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned}
g_2^2 \underbrace{=}_{(13)} & [-4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)]^2 \\
= \quad & 16(e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2 + 2e_1e_2^2e_3 + 2e_1^2e_2e_3 + 2e_1e_2e_3^2) \\
= \quad & 16(e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2 + 2e_1e_2e_3(\underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_{=0 \quad \text{nach (12)}})) \\
= \quad & 16(e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2).
\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir also

$$g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad \text{und} \quad g_2^2 = 16(e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2). \tag{16}$$

Weiter ergeben (12) und (13)

$$\begin{aligned}
2(e_1 - e_2)^2 &= 2(e_1^2 - 2e_1e_2 + e_2^2) \\
&= 2(e_1^2 + e_2^2) - 4e_1e_2 + \underbrace{2e_3^2 - 2e_3^2}_{=0} \\
&= \underbrace{2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)}_{=g_2 \quad \text{nach (16)}} - 2e_3^2 - 4e_1e_2 \underbrace{-4(e_2e_3 + e_3e_1) + 4(e_2e_3 + e_3e_1)}_{=0} \\
&= g_2 - 2e_3^2 + \underbrace{-4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)}_{=g_2 \quad \text{nach (13)}} + 4(e_2e_3 + e_3e_1) \\
&= 2g_2 - 2e_3^2 + 4e_3\underbrace{(e_1 + e_2)}_{-e_3} \\
&= 2g_2 - 6e_3^2.
\end{aligned}$$

Es folgt also

$$(e_1 - e_2)^2 = g_2 - 3e_3^2.$$

Durch zyklisches vertauschen lassen sich analog für e_1, e_2, e_3 die Beziehungen

$$\begin{aligned}
(e_1 - e_2)^2 &= g_2 - 3e_3^2\,, \\
(e_2 - e_3)^2 &= g_2 - 3e_1^2 \quad \text{und} \\
(e_3 - e_1)^2 &= g_2 - 3e_2^2,
\end{aligned}$$

beweisen.
Man erhält daraus

$$\begin{aligned}
&16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2\\
&=16(g_2-3e_3^2)(g_2-3e_1^2)(g_2-3e_2^2)\\
&=16g_2^3-3\cdot 16g_2^2\underbrace{(e_1^2+e_2^2+e_3^2)}_{=g_2/2\,,\quad \text{nach (16)}}+9\cdot 16g_2\underbrace{\underbrace{(e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2)}_{=g_2^2/16\,,\quad \text{nach (16)}}}_{g_2^2}-27\cdot\underbrace{16(e_1e_2e_3)^2}_{=g_3^2\,,\quad \text{nach (14)}}\\
&=(16-24+9)g_2^3-27g_3^2\\
&=g_2^3-27g_3^2.
\end{aligned}$$

Da zudem die e_1, e_2, e_3 nach Vortrag 5 paarweise verschieden sind, ist

$$g_2^3-27g_3^2=16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2\neq 0.$$ □

Die Identität (15) aus Korollar (3.4) erhält nun eine Bezeichnung in der

(3.5) Definition
Man nennt

$$\Delta:=\Delta(\Omega):=g_2^3-27g_3^2 \tag{17}$$

die *Diskriminante* und

$$j:=j(\omega):=\frac{(12g_2)^3}{\Delta} \tag{18}$$

die *absolute Invariante des Gitters* Ω. ◇

Aus den Korollaren (3.3) und (3.4) sowie Definition (3.5) erhalten wir folgendes

(3.6) Korollar
Es gilt

$$j=-4\cdot 12^3\cdot\frac{(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)^3}{(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2}\,.$$

Beweis
Es gilt

$$\begin{aligned} j &:= \frac{(12g_2)^3}{\Delta} \\ &= \frac{(12g_2)^3}{g_2^3 - 27g_3^2} \\ &\overset{(3.3),\,(3.4)}{=} 12^3 \cdot \frac{-4 \cdot 16(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)^3}{16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2} \\ &= 12^3 \cdot (-4) \cdot \frac{(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)^3}{(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2} \,. \end{aligned}$$

□

Durch Substitution erhalten wir eine weitere Darstellung der absoluten Invariante in dem

(3.7) Korollar
Für $\lambda := \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$ gilt

$$j = 256\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2} \,.$$

Beweis
Durch einsetzen von λ erhalten wir

$$\begin{aligned} & 256\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2} \\ &= 256\frac{(1+\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}+\frac{(e_2-e_3)^2}{(e_1-e_3)^2})^3}{\frac{(e_2-e_3)^2}{(e_1-e_3)^2}(1-\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3})^2} \\ &= 256\frac{\left(\frac{e_1^2-2e_1e_3+e_3^2+e_1e_3-e_3^2-e_1e_2+e_2e_3+e_2^2-2e_2e_3+e_3^2}{(e_1-e_3)^2}\right)^3}{\frac{(e_2-e_3)^2}{(e_1-e_3)^2}\left(\frac{e_1-e_3-e_2+e_3}{e_1-e_3}\right)^2} \\ &= 256\frac{(e_1-e_3)^4\cdot(e_1^2+e_2^2+e_3^2-e_1e_3-e_1e_3-e_2e_3)^3}{\underbrace{(e_3-e_1)^6}_{=(-1)^6(e_1-e_3)^6}\;(e_2-e_3)^2(e_1-e_2)^2} \\ &= 256\frac{(\overbrace{e_1^2+e_2^2+e_3^2}^{=g_2/2 \quad \text{nach (16)}}\;\overbrace{-e_1e_3-e_1e_3-e_2e_3}^{=g_2/4 \quad \text{nach (13)}})^3}{(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2(e_1-e_2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{256\left(\frac{g_2}{2}+\frac{g_2}{4}\right)^3}{(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2(e_1-e_2)^2}\\
&= \frac{256\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 g_2^3}{(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2(e_1-e_2)^2}\\
&= \frac{(12)^3\cdot 4\cdot g_2^3}{64(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2(e_1-e_2)^2}\\
&\overset{(13)}{=} \frac{4(12)^3\cdot(-4)^3(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)^3}{64(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2(e_1-e_2)^2}\\
&= -4\cdot 12^3\frac{(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)^3}{(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2(e_1-e_2)^2}\\
&= j.
\end{aligned}$$

□

Um die Nachfolgende Bemerkung zu verstehen ist hilfreich die

(3.8) Hilfsdefinition zur nachfolgenden Bemerkung

i.) Sei $f \in R[X]$, R kommutativer unitärer Ring, ein Polynom über R. Die *Diskriminante* von f ist definiert als die Resultante von f mit seiner Ableitung f', d.h.

$$\Delta(f) = Res(f, f').$$

ii.) Seien $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$ und $g = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n$ zwei Polynome vom Grad m bzw. n aus $R[X]$, dem Polynomring in einer Unbestimmten über einem kommutativen unitären Ring R. Dann ist die *Resultante* von f und g definiert als die Determinante der *Sylvester-Matrix*, d.h.

$$Res(f,g) = det\begin{pmatrix}
a_m & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & \\
0 & a_m & \cdots & a_0 & 0 & \cdots\\
 & & \ddots & & \ddots & \\
 & \cdots & 0 & a_m & \cdots & a_0\\
b_n & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & \\
0 & b_n & \cdots & b_0 & 0 & \cdots\\
 & & \ddots & & \ddots & \\
 & \cdots & 0 & b_n & \cdots & b_0
\end{pmatrix}.$$

Dabei stehen die Koeffizienten von f in $deg(g) = n$ Zeilen und die Koeffizienten von g in $deg(f) = m$ Zeilen. Die Matrix ist also eine quadratische $m+n$ Matrix. ◇

Damit erhalten wir nun die

(3.9) Bemerkung

a.) Die Diskriminante Δ ist bis auf einen Faktor zugleich auch Diskriminante des Polynoms $f(X) := 4X^3 - g_2X - g_3$ im Sinne der Algebra, denn es gilt

$$det\begin{pmatrix} 4 & 0 & -g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -g_2 & -g_3 \\ 12 & 0 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix} = -64\Delta.$$

Beweis

$$det\begin{pmatrix} 4 & 0 & -g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -g_2 & -g_3 \\ 12 & 0 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot det\begin{pmatrix} 4 & 0 & -g_2 & -g_3 \\ 0 & -g_2 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix} + 12 \cdot det\begin{pmatrix} 0 & -g_2 & -g_3 & 0 \\ 4 & 0 & -g_2 & -g_3 \\ 12 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot \left[4 \cdot det\begin{pmatrix} -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & -g_2 & 0 \\ 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix} + 12 \cdot det\begin{pmatrix} 0 & -g_2 & -g_3 \\ -g_2 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$+12 \left[-4 \cdot det\begin{pmatrix} -g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & -g_2 & 0 \\ 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix} + 12 \cdot det\begin{pmatrix} -g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & -g_2 & -g_3 \\ 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= 4\left[4(-g_2^3) - 12(-g_2)det\begin{pmatrix} -g_2 & -g_3 \\ 0 & -g_2 \end{pmatrix}\right] + 12\left[-4(-g_2^3) + 12(-g_2^3) + 12^2g_3^2\right]$$

$$= -16g_2^3 + 48g_2^3 + 48g_2^3 - 144g_2^3 + 1728g_3^2$$

$$= -64(g_2^3 - 27g_3^2)$$

$$= -64\Delta\,.$$

$\square$

b.) Die Bezeichnung „absolute Invariante“ rechtfertigt sich in Vortrag 9. $\diamond$

§4 Aufgaben

Aufgaben

1.) Für gegebenes $\omega \in \Omega$ mit $\omega \notin 2\Omega$ wird T definiert durch

$$T(z) = T_\omega(z) := \frac{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})}{\wp(z) - \wp(\frac{\omega}{2})} \qquad , z \in \Omega.$$

a.) T ist für eine gerade elliptische Funktion bezüglich Ω mit Nullstellen 2. Ordnung in den Punkten von Ω und Polen 2. Ordnung in den Punkten $\omega/2 + \Omega$.

b.) Jede gerade elliptische Funktion kann rational durch T dargestellt werden.

c.) $T(z) \cdot T(z + \omega/2) = 1$

2.) Man bestimme e_1, e_2, e_3 für den Fall, dass $g_3 = 0$ bzw. dass $g_2 = 0$. $\square$

Lösung

1.) zu a.) Da $T \in \mathbb{C}(\wp)$ gilt, ist T eine gerade elliptische Funktion.
Nullstellen:
Betrachte $f := \wp(z) - \wp(\frac{\omega}{2})$.
Wir wissen, dass $\wp(z)$ Polstellen 2. Ordnung in $z \in \Omega$ hat.
Da $\wp(\frac{\omega}{2}) = c,\ c \in \mathbb{C}$, hat $\wp(z) - \wp(\frac{\omega}{2})$ ebenfalls Polstellen 2. Ordnung in $z \in \mathbb{C}$.
Weiterhin ist $\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2}) = c',\ c' \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, da $\wp(\frac{\omega}{4}) \neq \wp(\frac{\omega}{2})$.
Somit hat $\frac{c'}{f}$ Nullstellen 2. Ordnung in $z \in \Omega$.
Polstellen:
Betrachte $f := \wp(z) - \wp(\frac{\omega}{2})$:
Für $z = \omega/2 + \Omega$ gilt

$$\wp(z) - \wp(\frac{\omega}{2}) = \wp(\omega/2 + \Omega) - \wp(\frac{\omega}{2}) = \wp(\frac{\omega}{2}) - \wp(\frac{\omega}{2}) = 0$$

Weiterhin gilt

$$\Big(\wp(z) - \wp(\frac{\omega}{2})\Big)' = \wp'(z).$$

Da $\wp'(z)$ nach Vortrag 5, Lemma (2.4), eine einfache Nullstelle in $\frac{\omega}{2} + \Omega$, gilt für $z = \frac{\omega}{2} + \Omega$ daher

$$\Big(\wp(z) - \wp(\frac{\omega}{2})\Big)' = \wp'(z) = 0$$

Also hat f eine Nullstelle 2.Ordnung in $\omega/2 + \Omega$ und $\frac{c'}{f}$ hat eine Polstelle 2.Ordnung in $z \in \omega/2 + \Omega$.

zu b.) Löse zunächst $T(z)$ nach $\wp(z)$ auf

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})}{\wp(z) - \wp(\frac{\omega}{2})} \\ \iff \wp(z) - \wp(\frac{\omega}{2}) &= \frac{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})}{T(z)} \\ \iff \wp(z) &= \frac{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})}{T(z)} + \wp(\frac{\omega}{2}) \\ \iff \wp(z) &= \frac{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2}) + \wp(\frac{\omega}{2}) \cdot T(z)}{T(z)}. \end{aligned}$$

Mit Vortrag 6, Satz (1.1)[6], folgt dann die Behauptung.

zu c.) i.) Nach a.) hat $T(z)$ in $z = \frac{\omega}{2} + \Omega$ Pole 2. Ordnung.
Beh.: $T(z + \frac{\omega}{2})$ hat Nullstellen 2. Ordnung in $z = \frac{\omega}{2} + \Omega$.
Für $z = \frac{\omega}{2} + \Omega$ gilt

$$T(z + \frac{\omega}{2}) = T(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} + \Omega) = T(\Omega).$$

Da T nach a.) Nullstellen 2. Ordnung in allen Punkten $z \in \Omega$ hat, hat $T(z + \frac{\omega}{2})$ Nullstellen 2. Ordnung in $z = \frac{\omega}{2} + \Omega$.
Multipliziert man $T(z) \cdot T(z + \omega/2)$ so heben sich in den Punkten $\frac{\omega}{2} + \Omega$ die Pole mit den Nullstellen weg und man erhält eine holomorphe Funktion in $\frac{\omega}{2} + \Omega$.

ii.) Nach a.) hat $T(z)$ in $z \in \Omega$ Nullstellen 2. Ordnung.
Beh.: $T(z + \frac{\omega}{2})$ hat Polstellen 2. Ordnung in $z \in \Omega$.
$T(\frac{\omega}{2} + \Omega)$ hat nach a.) Polstellen 2. Ordnung in allen Punkten $\omega \in \Omega$.
Multipliziert man $T(z) \cdot T(z + \omega/2)$ so heben sich in den Punkten $z \in \Omega$ die Pole mit den Nullstellen weg und man erhält eine holomorphe Funktion in $z \in \Omega$.

[6]Die geraden elliptischen Funktionen bezüglich Ω sind genau die rationalen Funktionen in $\wp$.

Mit i.) und ii.) folgt , dass $T(z) \cdot T(z + \omega/2)$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ da die Funktion wegen $D_{\wp \cdot \wp} \subset D_{\wp}$ nur Pole in $z = \frac{\omega}{2} + \Omega$ und $z = \Omega$ haben kann. Nach dem Satz A von LIOUVILLE ist $T(z) \cdot T(z + \omega/2) \equiv c,\ c \in \mathbb{C}$.
Wähle für $z = \frac{\omega}{4}$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}
&T(z) \cdot T(z + \omega/2) \\
=&\underbrace{\frac{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})}{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})}}_{=1} \cdot \frac{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})}{\wp(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{2}) - \wp(\frac{\omega}{2})} \\
=&\frac{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})}{\wp(\frac{3}{4}\omega) - \wp(\frac{\omega}{2})} \overset{\wp \text{ elliptisch}}{=} \frac{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})}{\wp(-\frac{1}{4}\omega) - \wp(\frac{\omega}{2})} \overset{\wp \text{ gerade}}{=} \frac{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})}{\wp(\frac{\omega}{4}) - \wp(\frac{\omega}{2})} = 1.
\end{aligned}$$

2.) i.) Sei $g_3 = 0$.
Setzt man die $e_k,\ k \in \{1, 2, 3\}$, aus (11) in (10) ein so folgt $\wp'(e_k) = 0$. Mit (9) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
& 0 = 4\wp^3(\omega_k/2) - g_2\wp(\omega_k/2) - g_3 \\
\overset{g_3=0}{\iff} \quad & 4\wp^3(\omega_k/2) - g_2\wp(\omega_k/2) = 0 \\
\iff \quad & 4e_k^3 - g_2 e_k = 0 \\
\iff \quad & (4e_k^2 - g_2) \cdot e_k = 0 \\
\iff \quad & e_k = 0 \ \vee \ e_k^2 = g_2/4 \\
\iff \quad & e_k = 0 \ \vee \ e_k = \pm\sqrt{g_2}/2.
\end{aligned}$$

Für die $e_k,\ k \in \{1, 2, 3\}$, folgt also im Falle von $g_3 = 0$

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{0, \frac{\sqrt{g_2}}{2}, -\frac{\sqrt{g_2}}{2}\right\}$$

ii.) Sei $g_2 = 0$.
Setzt man die $e_k,\ k \in \{1,2,3\}$, aus (11) in (10) ein so folgt $\wp'(e_k) = 0$. Mit (9) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
& 0 = 4\wp^3(\omega_k/2) - g_2\wp(\omega_k/2) - g_3 \\
\overset{g_2=0}{\iff}\quad & 4\wp^3(\omega_k/2) - g_3 = 0 \\
\iff\quad & 0 = 4e_k^3 - g_3 \\
\iff\quad & 4e_k^3 = g_3 \\
\iff\quad & e_k = \sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt nach (12)

$$0 = e_l + e_k + e_j \iff e_l = -e_k - e_j \tag{19}$$

für $l, k, j \in \{1,2,3\}$ paarweise verschieden.
Außerdem erhalten wir mit (13)

$$\begin{aligned}
& \frac{g_2}{4} = -(e_le_k + e_ke_j + e_je_l) \\
\overset{g_2=0}{\iff}\quad & 0 = -(e_le_k + e_ke_j + e_je_l) \\
\overset{(19)}{\iff}\quad & 0 = -((-e_k - e_j)e_k + e_ke_j + e_j(-e_k - e_j)) \\
\iff\quad & 0 = -(-e_k^2 - e_ke_j + e_ke_j - e_ke_j - e_j^2) \\
\iff\quad & 0 = e_k^2 + e_ke_j + e_j^2.
\end{aligned}$$

Also erhält man für e_j

$$\begin{aligned}
e_j &= -\frac{e_k}{2} \pm \sqrt{\frac{e_k^2}{4} - e_k^2} \\
&= -\frac{e_k}{2} \pm \sqrt{-\frac{3e_k^2}{4}} \\
&= -\frac{e_k}{2} \pm i\sqrt{\frac{3e_k^2}{4}} \\
&= -\frac{e_k}{2}\left(1 \mp i\sqrt{3}\right) \\
&\overset{e_k=\sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}}{=} -\frac{\sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}}{2}\left(1 \mp i\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Für die e_k, $k \in \{1,2,3\}$ folgt also im Falle von $g_2 = 0$

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}, -\frac{\sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right), -\frac{\sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) \right\}$$

□