Der Körper der elliptischen Funktionen

Vortrag zum Seminar „Elliptische Funktionen und elliptische Kurven“, 30.11.2005

Sebastian Thomas

In diesem Vortrag soll es darum gehen, den Körper der elliptischen Funktionen näher zu untersuchen. Dazu wird mit Hilfe der LIOUVILLEschen Sätze aus dem vorangegangen Vortrag eine algebraische Beschreibung des Körpers aller elliptischen Funktionen gegeben; es wird sich herausstellen, dass sich jede elliptische Funktion als rationale Funktion in der WEIERSTRASSschen $\wp$-Funktion und deren Ableitung schreiben lässt (mit gewissen zusätzlichen Einschränkungen). Danach werden wir das Konzept der Divisoren kennenlernen und zuletzt die Konstruktion der WEIERSTRASSschen $\wp$-Funktion nachholen.

§ 1 Der Körper $\mathcal{K}(\Omega)$

0Wir wollen die algebraische Struktur des Körper $\mathcal{K}(\Omega)$ aller elliptischen Funktion zu einem gegebenen Gitter $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ genauer untersuchen und diese in Abhängigkeit von der im letzten Vortrag eingeführten WEIERSTRASSschen $\wp$-Funktion angeben. Dabei ergibt sich zunächst der folgende Satz.

(1.1) Satz
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebiges Gitter. Dann gilt:

a) Die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion (zum Gitter Ω) ist transzendent über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

b) Die geraden elliptischen Funktionen bezüglich Ω sind genau die rationalen Funktionen in $\wp$, das heißt

$$\{f \in \mathcal{K}(\Omega) \mid f(-z) = f(z) \text{ für alle } z \in \operatorname{dom} f\} = \mathbb{C}(\wp).$$

c) Es ist $\mathcal{K}(\Omega) = \mathbb{C}(\wp)[\wp']$ mit Erweiterungsgrad $[\mathcal{K}(\Omega) : \mathbb{C}(\wp)] = 2$. ◇

Beweis

a) Nach dem Existenzsatz (2.1) aus dem Vortrag vom 23.11.2005 ist die LAURENTreihe von $\wp$ im Punkt 0 gegeben durch

$$\wp(z) = z^{-2} + a_1 z + \dots,$$

das heißt ein beliebiges nicht-triviales Polynom in $\wp$ kann nicht verschwinden (da sich die Pole nicht wegheben können). Daher ist $\wp$ nicht algebraisch und somit transzendent über $\mathbb{C}$.

b) Zunächst stellen wir fest, dass sicherlich jede rationale Funktion in $\wp$ elliptisch (da $\mathcal{K}(\Omega)$ Körper) und gerade (wie man direkt nachrechnet) ist. Es sei also $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ eine gerade elliptische Funktion. O. B. d. A. können wir annehmen, dass f nicht konstant ist (denn sonst ist trivialerweise $f \in \mathbb{C}(\wp)$). Weiter sei (ω_1, ω_2) eine beliebige Basis von Ω und m die Anzahl der Pole von f im Periodenparallelogramm $P := \Diamond(\omega_1, \omega_2) = \{\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 \in \mathbb{C} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1)\}$; außerdem definieren wir $N := \{c \in P \mid f'(c) = 0\}$ als die Menge der Nullstellen von f' in P. Nach Lemma (4.5) aus dem Vortrag vom 16.11.2005 ist mit f auch f' elliptisch und damit nach Proposition (4.4) aus dem gleichen Vortrag N und somit auch $f(N)$ eine endliche Menge.

Nun ist nach dem dritten Satz von LIOUVILLE (Satz (1.9) aus dem letzten Vortrag) für alle $u \in \mathbb{C} \setminus f(N)$ auch die Anzahl der u-Stellen von f (mit Vielfachheiten) durch m gegeben. Es sei ein $c \in P$ mit $f(c) = u$ beliebig gegeben (nach Annahme ist f nicht konstant und damit nicht holomorph, das heißt es gilt $m > 0$). Da f gerade ist, gilt somit auch $f(-c) = u$ und mit Proposition (3.3) aus dem Vortrag vom 02.11.2005 gibt es genau ein $\omega \in \Omega$ mit $c' := \omega - c \in P$ und

$$f(c') = f(\omega - c) = f(-c) = u.$$

Wäre nun $c' = c$, so ergäbe sich

$$f(c + z) = f(c' + z) = f(\omega - c + z) = f(-c + z) = f(c - z),$$

also $f'(c + z) = -f'(c - z)$ für alle $z \in \operatorname{dom}(f)$ und damit $f'(c) = 0$ im Widerspruch zur Wahl von $u \notin f(N)$. Somit sind c und $c' = \omega - c$ verschiedene u-Stellen von f in P, das heißt die Anzahl m der u-Stellen ist gerade: Ist nämlich ein $\omega' \in \Omega$ mit $c'' = \omega' - c' \in P$ gegeben, so folgt

$$c'' = \omega' - c' = \omega' - (\omega - c) = (\omega' - \omega) + c,$$

wegen der Eindeutigkeit in Proposition (3.3) aus dem Vortrag vom 02.11.2005 also $\omega' - \omega = 0$ und damit $c'' = c$. Wegen $f' = (f - u)'$ und $u \notin f(N)$ ist außerdem die Vielfachheit von u in c und c' jeweils gleich 1. Insgesamt gibt es zu $u \in \mathbb{C} \setminus f(N)$ somit $m = 2k$ verschiedene u-Stellen

$$c_1, \dots, c_k, c'_1, \dots, c'_k \in P \quad \text{mit } c_j + c'_j \in \Omega \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, k\},$$

welche alle Vielfachheit 1 haben. Analog hat f zu $v \in \mathbb{C} \setminus f(N)$, $v \neq u$ ebenfalls m verschiedene v-Stellen

$$d_1, \dots, d_k, d'_1, \dots, d'_k \in P \quad \text{mit } d_j + d'_j \in \Omega \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, k\}$$

der Vielfachheit 1. Definieren wir nun eine elliptische Funktion $g \in \mathcal{K}(\Omega)$ durch

$$g(z) := \frac{f(z) - u}{f(z) - v} \quad \text{für alle } z \in P \setminus (\{d_1, \dots, d_k, d'_1, \dots, d'_k\} \cup D_f)$$

(wobei D_f die Polstellenmenge von f bezeichne) und setzen g so weit wie möglich holomorph und periodisch bezüglich Ω fort, so hat g genau an den Stellen c_j, c'_j für $j \in \{1, \dots, k\}$ Nullstellen und genau an den Stellen d_j, d'_j für $j \in \{1, \dots, k\}$ Pole, jeweils mit der Vielfachheit 1 (man beachte, dass g in den Polstellen von f wohldefiniert ist, das heißt holomorph fortgesetzt werden kann, denn es ist $\operatorname{ord}_c(f - u) = -\operatorname{ord}_c(\frac{1}{f-v})$ für alle $c \in D_f$). Die elliptische Funktion $h \in \mathcal{K}(\Omega)$ gegeben durch

$$h(z) := \frac{(\wp(z) - \wp(c_1)) \cdot \dots \cdot (\wp(z) - \wp(c_k))}{(\wp(z) - \wp(d_1)) \cdot \dots \cdot (\wp(z) - \wp(d_k))}$$

für alle $z \in P \setminus (\{d_1, \dots, d_k, d'_1, \dots, d'_k\} \cup \Omega)$ (und so weit wie möglich holomorph und periodisch fortgesetzt), erfüllt jedoch ebenfalls die Eigenschaft, einfache Nullstellen genau in den Punkten c_j, c'_j für $j \in \{1, \dots, k\}$ und einfache Pole genau in den Punkten d_j, d'_j für $j \in \{1, \dots, k\}$ zu haben, das heißt der Quotient $\frac{g}{h}$ ist eine holomorphe elliptische Funktion und damit nach dem ersten Satz von LIOUVILLE (Satz (1.1) aus dem Vortrag vom 23.11.2005) konstant. Also ist $g \in \mathbb{C}(\wp)$ und wegen $f = \frac{vg-u}{g-1}$ somit auch $f \in \mathbb{C}(\wp)$.

c) Für alle $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt die Darstellung $f = g + h\wp'$ mit $g(z) := \frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$ und $h(z) := \frac{1}{2\wp'(z)}(f(z) - f(-z))$. Wie man leicht nachrechnet, sind $g, h \in \mathcal{K}(\Omega)$ und gerade, das heißt nach Teil (b) sind $g, h \in \mathbb{C}(\wp)$ bzw. $f \in \mathbb{C}(\wp)[\wp']$ und wegen $\wp' \notin \mathbb{C}(\wp)$ (da $\wp' \neq 0$ ungerade) folgt die Behauptung aus der ersten Differentialgleichung für $\wp$ (vergleiche Satz (2.8) im letzten Vortrag). $\square$

Mit Hilfe der ersten Differentialgleichung für $\wp$ können wir die Struktur von $\mathcal{K}(\Omega)$ noch etwas genauer angeben.

(1.2) Korollar
Für über $\mathbb{C}$ unabhängige Unbestimmte X, Y gilt

$$\mathcal{K}(\Omega) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2 - 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3))\mathbb{C}(X)[Y].$$

(Dabei seien e_1, e_2, e_3 die Konstanten aus Satz (2.8) vom letzten Vortrag.) $\diamond$

Beweis
Wir definieren einen Ringhomomorphismus $\Phi\colon \mathbb{C}(X)[Y] \to \mathcal{K}(\Omega)$ durch $\Phi(X) := \wp$ und $\Phi(Y) := \wp'$. Nach Satz (1.1) gibt es zu jeder elliptischen Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ rationale Funktionen $R, Q \in \mathbb{C}(X)$ mit $f = R(\wp) + Q(\wp)\wp'$, das heißt Φ ist surjektiv. Um den Kern von Φ zu bestimmen, sei ein Polynom $p \in \mathbb{C}(X)[Y]$ beliebig gegeben. Nach Division mit Rest gibt es dazu Polynome $q, r \in \mathbb{C}(X)[Y]$ mit

$$p(X,Y) = (Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3))q(X,Y) + r(X,Y),$$

wobei $\operatorname{grad}_Y r < 2$ ist. Nun genügt die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion nach Satz (2.8) aus dem Vortrag vom 23.11.2005 der Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3),$$

es folgt somit

$$\begin{aligned}\Phi(p) = p(\wp,\wp') &= (\wp'^2 - 4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3))q(\wp,\wp') + r(\wp,\wp')\\ &= 0 \cdot q(\wp,\wp') + r(\wp,\wp') = r(\wp,\wp')\end{aligned}$$

und es ist $p \in \operatorname{Kern}\Phi$ genau dann, wenn $r(\wp,\wp') = 0$ ist. Wegen $\operatorname{grad}_Y r < 2$ lässt sich $r(X,Y)$ aber darstellen als $r(X,Y) = R(X) + Q(X)Y$ mit rationalen Funktionen $R, Q \in \mathbb{C}(X)$, außerdem ist $(1,\wp')$ eine $\mathbb{C}(\wp)$-Basis von $\mathcal{K}(\Omega)$, das heißt es ist $r(\wp,\wp') = R(\wp) + Q(\wp)\wp' \in \mathcal{K}(\Omega)$. Somit gilt $r(\wp,\wp') = 0$ genau dann, wenn $r = 0$ ist. Insgesamt ist also $p \in \operatorname{Kern}\Phi$ äquivalent zu

$$p(X,Y) = (Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3))q(X,Y) \text{ für ein } q \in \mathbb{C}(X)[Y]$$

und damit

$$\operatorname{Kern}\Phi = (Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3))\mathbb{C}(X)[Y].$$

Mit dem Homomorphiesatz für Ringe folgt die Behauptung. □

(1.3) Korollar
Es gibt kein $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit $\mathcal{K}(\Omega) = \mathbb{C}(f)$. ◇

Beweis
Angenommen, es gibt eine elliptische Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit $\mathcal{K}(\Omega) = \mathbb{C}(f)$. Dann ist der Einsetzungshomomorphismus

$$\mathbb{C}(X) \mapsto \mathcal{K}(\Omega), X \mapsto f$$

surjektiv, als Körperhomomorphismus also bijektiv. Mit Korollar (1.2) folgt

$$\mathbb{C}(X) \cong \mathcal{K}(\Omega) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3))\mathbb{C}(X)[Y].$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da $\mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3))\mathbb{C}(X)[Y]$ ein Vektorraum der Dimension 2 über $\mathbb{C}(X)$ ist, $\mathbb{C}(X)$ selbst jedoch nicht. Daher war unsere Annahme falsch, es gibt also keine elliptische Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit $\mathcal{K}(\Omega) = \mathbb{C}(f)$. $\square$

Das folgende Korollar ergibt sich leicht aus einem bekannten Ergebnis aus der Algebra. Dafür müsste allerdings der Begriff des Transzendenzgrades eingeführt werden, worauf wir hier an dieser Stelle verzichten wollen.

(1.4) Korollar
Für alle elliptischen Funktionen $f, g \in \mathcal{K}(\Omega)$ gibt es ein nicht-triviales Polynom $p \in \mathbb{C}[X, Y]$ mit $p(f, g) = 0$. $\diamond$

(1.5) Bemerkung
Weil $\mathcal{K}(\Omega)$ ein Körper ist, ist $(Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3))\mathbb{C}(X)[Y]$ ein maximales Ideal und $Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)$ ein irreduzibles Polynom in Y über $\mathbb{C}(X)$. $\diamond$

§ 2 Divisoren

Als nächstes wollen wir das Konzept des Divisors zur Faktorgruppe $\mathbb{C}/\Omega$ einführen und deren algebraische Struktur untersuchen. Dieses soll später der Konstruktion von elliptischen Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen und Vielfachheiten dienen. An dieser Stelle wird sich zunächst herausstellen, dass wir jeder elliptischen Funktion auf kanonische Weise einen Divisor zuordnen können und dass sich die Faktorgruppe $\mathbb{C}/\Omega$ mit Hilfe der Menge aller Divisoren, welche von elliptischen Funktionen herrühren, beschreiben lässt.

(2.1) Definition (Grad, Divisor)
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebiges Gitter und $\varphi\colon \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung mit endlichem Träger (das heißt es sei $\varphi(\mathfrak{c}) \neq 0$ nur für endlich viele $\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega$).

a) Der *Grad* von φ sei definiert durch

$$\operatorname{Grad} \varphi := \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi(\mathfrak{c}).$$

b) Die Abbildung φ heißt ein *Divisor* von $\mathbb{C}/\Omega$, falls $\operatorname{Grad} \varphi = 0$ ist. Die Menge aller Divisoren auf $\mathbb{C}/\Omega$ werde mit $\operatorname{Div}(\mathbb{C}/\Omega)$ bezeichnet. $\diamond$

(2.2) Proposition
Bezüglich der punktweisen Addition bildet die Menge $\mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Omega)$ aller Divisoren auf $\mathbb{C}/\Omega$ eine abelsche Gruppe. ◇

Beweis
Es seien Divisoren $\varphi, \psi \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Omega)$ beliebig gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Grad}(\varphi - \psi) &= \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} (\varphi - \psi)(\mathfrak{c}) = \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi(\mathfrak{c}) - \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} \psi(\mathfrak{c}) \\ &= \mathrm{Grad}\,\varphi - \mathrm{Grad}\,\psi = 0 - 0 = 0,\end{aligned}$$

das heißt es ist auch $\varphi + \psi \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Omega)$ ein Divisor. Also ist $\mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Omega)$ abgeschlossen unter punktweiser Addition und damit eine Untergruppe von $\mathbb{Z}^{(\mathbb{C}/\Omega)}$. □

(2.3) Proposition
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebiges Gitter und $f \in \mathcal{K}(\Omega)^*$ eine nicht-triviale elliptische Funktion. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_f \colon \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{Z}, c + \Omega \mapsto \mathrm{ord}_c\, f$$

wohldefiniert und ein Divisor auf $\mathbb{C}/\Omega$. ◇

Beweis
Es seien komplexe Zahlen $c, \tilde{c} \in \mathbb{C}$ mit $c + \Omega = \tilde{c} + \Omega$ bzw. $c - \tilde{c} \in \Omega$ gegeben. Mit Bemerkung (4.3) aus dem Vortrag vom 16.11.2005 folgt

$$\mathrm{ord}_{\tilde{c}}\, f = \mathrm{ord}_{\tilde{c}+(c-\tilde{c})}\, f = \mathrm{ord}_c\, f,$$

das heißt φ_f ist wohldefiniert. Ist P ein beliebiges Periodenparallelogramm, so gilt unter Anwendung des dritten Satzes von LIOUVILLE (Satz (1.9) aus dem Vortrag vom 23.11.2005) ferner

$$\mathrm{Grad}\,\varphi_f = \sum_{c+\Omega \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi_f(c + \Omega) = \sum_{c \in P} \mathrm{ord}_c\, f = 0,$$

also $\varphi_f \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/\Omega)$, da $\mathrm{ord}_c\, f = 0$ für fast alle $c \in P$. □

(2.4) Definition (Hauptdivisor einer elliptischen Funktion)
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebiges Gitter. Für eine nicht-triviale elliptische Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)^*$ heißt die Abbildung

$$\varphi_f \colon \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{Z}, c + \Omega \mapsto \mathrm{ord}_c\, f$$

der *Hauptdivisor* zu f. ◇

(2.5) Satz
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebiges Gitter. Dann gilt:

a) Die Abbildung
$$\Phi\colon \operatorname{Div}(\mathbb{C}/\Omega) \to \mathbb{C}/\Omega, \varphi \mapsto \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi(\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c}$$
ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, und es gilt
$$\operatorname{Div}(\mathbb{C}/\Omega) / \operatorname{Kern} \Phi \cong \mathbb{C}/\Omega.$$

b) Es gilt
$$\{\varphi_f \in \operatorname{Div}(\mathbb{C}/\Omega) \mid f \in \mathcal{K}(\Omega)^*\} \subseteq \operatorname{Kern} \Phi. \qquad \diamond$$

Beweis
a) Es seien beliebige Divisoren $\varphi, \psi \in \operatorname{Div}(\mathbb{C}/\Omega)$ gegeben. Dann ist
$$\Phi(\varphi + \psi) = \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} (\varphi + \psi)(\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c} = \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi(\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c} + \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} \psi(\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c} = \Phi(\varphi) + \Phi(\psi),$$
das heißt Φ ist ein Gruppenhomomorphismus. Um zu zeigen, dass Φ surjektiv ist, sei ein Element $\mathfrak{d} \in \mathbb{C}/\Omega$ beliebig gegeben. Ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{o} = \Omega$, so gilt
$$\Phi(0) = \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} 0(\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{o},$$
es sei also o. B. d. A. $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{o}$. Wir definieren
$$\varphi(\mathfrak{c}) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathfrak{c} = \mathfrak{d}, \\ -1, & \text{falls } \mathfrak{c} = \Omega, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Dann ist
$$\operatorname{Grad}(\varphi) = \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi(\mathfrak{c}) = 1 + (-1) = 0,$$
das heißt es ist $\varphi \in \operatorname{Div}(\mathbb{C}/\Omega)$ und
$$\Phi(\varphi) = \sum_{\mathfrak{c} \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi(\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c} = \varphi(\mathfrak{d}) \cdot \mathfrak{d} + \varphi(\mathfrak{o}) \cdot \mathfrak{o} = 1 \cdot \mathfrak{d} + (-1) \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{d}.$$
Somit ist Φ surjektiv und mit dem Homomorphiesatz für Gruppen folgt
$$\operatorname{Div}(\mathbb{C}/\Omega) / \operatorname{Kern} \Phi \cong \mathbb{C}/\Omega.$$

b) Es sei $f \in \mathcal{K}(\Omega)^*$ eine nicht-triviale elliptische Funktion und φ_f ihr Hauptdivisor. Nach dem vierten Satz von LIOUVILLE (siehe Satz (1.11) im letztem Vortrag) ist dann

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi_f) &= \sum_{c+\Omega\in\mathbb{C}/\Omega} \varphi_f(c+\Omega)\cdot(c+\Omega) = \sum_{c\in P}(\operatorname{ord}_c f)\cdot(c+\Omega)\\ &= (\sum_{c\in P}(\operatorname{ord}_c f)\cdot c) + \Omega = \Omega = 0\end{aligned}$$

für ein beliebiges Periodenparallelogramm P. Also folgt

$$\{\varphi_f \in \operatorname{Div}(\mathbb{C}/\Omega) \mid f \in \mathcal{K}(\Omega)^*\} \subseteq \operatorname{Kern}\Phi.$$

□

(2.6) Bemerkung
Für die Abbildung Φ aus Satz (2.5) lässt sich später sogar zeigen, dass

$$\operatorname{Kern}\Phi = \{\varphi_f \in \operatorname{Div}(\mathbb{C}/\Omega) \mid f \in \mathcal{K}(\Omega)^*\}$$

ist. ◇

§3 Die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion

In diesem Abschnitt wollen wir die Konstruktion der WEIERSTRASSschen $\wp$-Funktion zu einem gegebenen Gitter $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ nachtragen.

(3.1) Proposition
Es sei $K \subseteq \{(\omega_1,\omega_2) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} \mid \omega_2 \neq 0, \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}\}$ ein Kompaktum. Dann gibt es Konstanten $\alpha,\beta > 0$, so dass

$$\alpha|m_1+m_2 i| \leq |m_1\omega_1+m_2\omega_2| \leq \beta|m_1+m_2 i| \quad \text{für alle } m_1,m_2 \in \mathbb{R}, (\omega_1,\omega_2)\in K.$$

◇

Beweis
Da die Funktion

$$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, (\omega_1,\omega_2,m_1,m_2) \mapsto |m_1\omega_1+m_2\omega_2|$$

stetig ist, nimmt sie nach dem Extremwertsatz von WEIERSTRASS auf der kompakten Teilmenge $K \times \{(m_1,m_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |m_1+m_2 i| = 1\}$ ein Minimum α und ein Maximum β an. Da aber $(\omega_1,\omega_2) \in K$ über $\mathbb{R}$ stets linear unabhängig ist, gilt $m_1\omega_1+m_2\omega_2 \neq 0$ für alle $(m_1,m_2) \neq (0,0)$. Insbesondere also auch für alle Paare $(m_1,m_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $|m_1+m_2 i| = 1$, das heißt es sind $\alpha,\beta > 0$. Ist nun $(m_1,m_2) \in$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ beliebig (für $(0,0)$ ist die Behauptung trivialerweise erfüllt), so erfüllt $(m_1', m_2') := \frac{(m_1,m_2)}{||(m_1,m_2)||}$ die Eigenschaft $|m_1' + m_2' i| = ||(m_1', m_2')|| = 1$ und es folgt

$$\begin{aligned}\alpha|m_1 + m_2 i| &\leq |m_1'\omega_1 + m_2'\omega_2|\,|m_1 + m_2 i| \\ &= \left|\frac{m_1}{||(m_1,m_2)||}\omega_1 + \frac{m_2}{||(m_1,m_2)||}\omega_2\right| \cdot ||(m_1,m_2)|| = |m_1\omega_1 + m_2\omega_2|\end{aligned}$$

sowie analog

$$|m_1\omega_1 + m_2\omega_2| \leq \beta|m_1 + m_2 i|. \qquad \square$$

(3.2) Satz (Konvergenzsatz)
Die Reihe

$$\wp(z;\omega_1,\omega_2) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in (\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

konvergiert absolut gleichmäßig auf jedem Kompaktum in

$$\{(z,\omega_1,\omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \omega_2 \neq 0, \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}, z \notin \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2\}. \qquad \diamond$$

Beweis
Es sei $K \subseteq \{(z,\omega_1,\omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \omega_2 \neq 0, \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}, z \notin \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2\}$ kompakt. Wir wählen ein $\rho > 0$ und eine kompakte Teilmenge $K' \subseteq \{(\omega_1,\omega_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \omega_2 \neq 0, \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}\}$, so dass

$$K \subseteq \overline{\mathrm{K}_\rho(0)} \times K',$$

wobei $\overline{\mathrm{K}_\rho(0)} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho\}$ den abgeschlossenen Kreis um den Ursprung mit Radius ρ bezeichne. Nach Proposition (3.1) gibt es zum Kompaktum K' ein $\alpha > 0$, so dass

$$\alpha|m_1 + m_2 i| \leq |m_1\omega_1 + m_2\omega_2| \quad \text{für alle } m_1, m_2 \in \mathbb{R}, (\omega_1,\omega_2) \in K'.$$

Für alle $(z,\omega_1,\omega_2) \in K$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ mit $|m_1 + m_2 i| \geq \frac{\rho+1}{\alpha}$ ergibt sich dann

$$|m_1\omega_1 + m_2\omega_2| \geq \alpha|m_1 + m_2 i| \geq \alpha \cdot \frac{\rho+1}{\alpha} = \rho + 1.$$

Setzen wir nun $\omega := m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, so folgt mit $|z| \leq \rho$ weiter

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| &= \left|\frac{\omega^2-(z-\omega)^2}{\omega^2(z-\omega)^2}\right| = \left|\frac{\omega^2 - z^2 + 2z\omega - \omega^2}{\omega^2(z-\omega)^2}\right| = \left|\frac{2z\omega - z^2}{\omega^2(z-\omega)^2}\right| \\
&= \left|\frac{2z - \frac{z^2}{\omega}}{\omega(\omega-z)^2}\right| = \left|\frac{2-\frac{z}{\omega}}{(1-\frac{z}{\omega})^2}\right| \cdot \frac{|z|}{|\omega|^3} \leq \frac{2+\frac{|z|}{|\omega|}}{|1-\frac{z}{\omega}|^2} \cdot \frac{|z|}{|\omega|^3} \\
&\leq \frac{2+\frac{|z|}{|\omega|}}{(|1|-|\frac{z}{\omega}|)^2} \cdot \frac{|z|}{|\omega|^3} \leq \frac{2+\frac{\rho}{\rho+1}}{(1-\frac{\rho}{\rho+1})^2} \cdot \frac{\rho}{|\omega|^3} \\
&\leq \frac{2+1}{(\frac{(\rho+1)-\rho}{\rho+1})^2} \cdot \frac{\rho}{|m_1\omega_1 + m_2\omega_2|^3} \leq \frac{3\rho(\rho+1)^2}{\alpha^3|m_1+m_2 i|^3}.
\end{aligned}$$

Da die Anzahl der Paare $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}$ mit $|m_1 + m_2 i| < \frac{\rho+1}{\alpha}$ endlich ist, ist die Abbildung

$$K \to \mathbb{R}, (z, \omega_1, \omega_2) \mapsto \min_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}, |m_1+m_2 i|<\frac{\rho+1}{\alpha}} |z - (m_1\omega_1 + m_2\omega_2)|$$

wohldefiniert und als kürzester Abstand von z zu einem Gitterpunkt stetig und K kompakt ist, hat diese ein Minimum C. Dabei ist $C > 0$, denn für $C = 0$ gäbe es ein $z \in \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ im Widerspruch zur Definition von K. Ferner gilt $|m_1\omega_1 + m_2\omega_2| \geq \alpha|m_1 + m_2 i| \geq \alpha > 0$ für alle $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}$, insgesamt also

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(z-(m_1\omega_1+m_2\omega_2))^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{(z-(m_1\omega_1+m_2\omega_2))^2}\right| + \left|\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right| \\
&= \frac{1}{|z-(m_1\omega_1+m_2\omega_2)|^2} + \frac{1}{|m_1\omega_1+m_2\omega_2|^2} \leq \frac{1}{C^2} + \frac{1}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

für alle $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}$ mit $|m_1 + m_2 i| < \frac{\rho+1}{\alpha}$. Bezeichnet nun

$$N := |\{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 0 < |m_1 + m_2 i| < \frac{\rho+1}{\alpha}\}|$$

die Anzahl aller vom Ursprung verschiedenen Elemente im Gitter $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$, die auch im Kreis $K_{\frac{\rho+1}{\alpha}}$ liegen, so folgt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\omega\in(\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2)\setminus\{0\}} \left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right| \\
&= \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \left|\frac{1}{(z-(m_1\omega_1+m_2\omega_2))^2}-\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right| \\
&= \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\},|m_1+m_2 i|<\frac{\rho+1}{\alpha}} \left|\frac{1}{(z-(m_1\omega_1+m_2\omega_2))^2}-\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right| \\
&\quad + \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\},|m_1+m_2 i|\geq\frac{\rho+1}{\alpha}} \left|\frac{1}{(z-(m_1\omega_1+m_2\omega_2))^2}-\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right| \\
&\leq \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\},|m_1+m_2 i|<\frac{\rho+1}{\alpha}} \left(\frac{1}{C^2}+\frac{1}{\alpha^2}\right) \\
&\quad + \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\},|m_1+m_2 i|\geq\frac{\rho+1}{\alpha}} \frac{3\rho(\rho+1)^2}{\alpha^3|m_1+m_2 i|^3} \\
&\leq \frac{N(\alpha^2+C^2)}{\alpha^2C^2}+\frac{3\rho(\rho+1)^2}{\alpha^3}\sum_{\tilde{\omega}\in(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)\setminus\{0\}}\frac{1}{|\tilde{\omega}|^3} \\
&= \frac{N(\alpha^2+C^2)}{\alpha^2C^2}+\frac{3\rho(\rho+1)^2}{\alpha^3}G_3(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir die absolute Konvergenz aus der absoluten Konvergenz der EISENSTEIN-Reihe $G_3(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$. □

(3.3) Lemma
Es sei $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ein beliebiges Gitter. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{(z-\omega)^k}$$

für alle $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 3$, absolut gleichmäßig auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}\setminus\Omega$. ◇

Beweis
Analog zum Konvergenzsatz (3.2). Entscheidend hierbei ist die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^k}\right| = \frac{1}{|1-\frac{z}{\omega}|^k}\cdot\frac{1}{|\omega|^k} \leq \frac{1}{(|1|-\frac{|z|}{|\omega|})^k}\cdot\frac{1}{|\omega|^k} \leq \frac{1}{(1-\frac{\rho}{\rho+1})^k}\cdot\frac{1}{|\omega|^k} = \frac{(\rho+1)^k}{|\omega|^k}$$

für $|z| \leq \rho$, $|\omega| \geq \rho + 1$, $\rho > 0$, sowie die Konvergenz der Eisensteinreihe $G_k(\Omega)$ für $k \geq 3$. □

(3.4) Satz (Konstruktionssatz für die $\wp$-Funktion)
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebiges Gitter.

a) Die Reihe

$$\wp(z) := \wp_\Omega(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

konvergiert in jedem Kompaktum von $\mathbb{C}$, das keinen Gitterpunkt enthält, absolut gleichmäßig.

b) Die LAURENTreihe bei 0 hat die Form

$$\wp(z) = z^{-2} + a_1 z + \ldots$$

c) Die Funktion $\wp \colon \mathbb{C} \setminus \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto \wp(z)$ ist eine gerade elliptische Funktion bezüglich Ω, welche genau in den Gitterpunkten von Ω Pole der Ordnung 2 mit Residuum 0 hat und holomorph in $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ist. ◇

Beweis
Für alle $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ setzen wir

$$f_\omega(z) := \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}.$$

a) Dies folgt bereits aus dem Konvergenzsatz (3.2).

b) Es ist $f_\omega(0) = \frac{1}{(0-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = 0$, das heißt die LAURENTreihe von $\wp$ bei 0 hat das konstante Glied 0.

c) Um zu zeigen, dass $\wp$ eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ mit Polstellen 2. Ordnung in Ω ist, sei ein $\rho > 0$ beliebig gegeben. Dann ist

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0<|\omega|<\rho+1} f_\omega(z) + \sum_{|\omega| \geq \rho+1} f_\omega(z).$$

Während $\frac{1}{z^2} + \sum_{0<|\omega|<\rho+1} f_\omega(z)$ meromorph auf $K_\rho(0)$ ist, konvergiert die Reihe $\sum_{|\omega|\geq\rho+1} f_\omega(z)$ nach dem Konvergenzsatz (3.2) absolut gleichmäßig auf $K_\rho(0)$, ist also holomorph. Daher hat $\wp|_{K_\rho(0)}$ genau in den Punkten $\Omega \cap K_\rho(0)$ Pole 2. Ordnung mit Residuum 0 und da $\rho > 0$ beliebig gewählt war, ist $\wp$ eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit Polstellen 2. Ordnung genau in den Punkten des Gitters Ω

(und Residuum 0).
Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ ist weiterhin

$$\begin{aligned}\wp(-z) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(-z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{-\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(-z+\omega)^2} - \frac{1}{(-\omega)^2} \right) \\ &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \wp(z),\end{aligned}$$

das heißt $\wp \colon \mathbb{C} \setminus \Omega \to \mathbb{C}$ ist gerade. Nach (a) kann die Reihe gliedweise differenziert werden:

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{-2}{(z-\omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Somit ist $\wp'(z)$ nach Lemma (3.3) absolut konvergent und für alle $\omega \in \Omega$ folgt $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$.
Es sei nun (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω und seien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ gegeben mit $\wp(z+\omega_j) = \wp(z) + C_j$ für $j \in \{1,2\}, z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Dann sind $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2} \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ und damit $-\frac{\omega_1}{2}, -\frac{\omega_2}{2} \in \mathbb{C} \setminus \Omega$; es folgt

$$C_j = \wp(-\frac{\omega_j}{2} + \omega_j) - \wp(-\frac{\omega_j}{2}) = \wp(\frac{\omega_j}{2}) - \wp(-\frac{\omega_j}{2}) = 0 \quad \text{für } j \in \{1,2\}$$

und damit $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\omega \in \Omega$, das heißt $\wp$ ist eine elliptische Funktion zum Gitter Ω. □

(3.5) Beispiel
Es sei (ω_1, ω_2) eine Basis des Gitters Ω, $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ und $f \in \mathcal{K}(2\Omega)$. Dann ist g definiert durch

$$g(z) := f(z) + f(z+\omega_1) + f(z+\omega_2) + f(z+\omega_3) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

eine elliptische Funktion zum Gitter Ω, denn mit f ist auch g meromorph und es gilt

$$\begin{aligned}g(z+\omega_1) &= f(z+\omega_1) + f(z+\omega_1+\omega_1) + f(z+\omega_1+\omega_2) + f(z+\omega_1+\omega_3) \\ &= f(z+\omega_1) + f(z+2\omega_1) + f(z+\omega_1+\omega_2) + f(z+2\omega_1+\omega_2) \\ &= f(z+\omega_1) + f(z) + f(z+\omega_3) + f(z+\omega_2) = g(z)\end{aligned}$$

sowie analog

$$g(z+\omega_2) = g(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Ist nun $f := \wp_{2\Omega}$, so hat g Polstellen genau in den Punkten

$$2\Omega \cup (2\Omega + \omega_1) \cup (2\Omega + \omega_2) \cup (2\Omega + \omega_3) = \Omega,$$

denn in den Polstellen von $\wp_{2\Omega}(z+\omega_i)$ sind alle $\wp_{2\Omega}(z+\omega_j)$ für $i, j \in \{0,1,2,3\}$, $i \neq j$, $\omega_0 := 0$, holomorph (die Polstellen der vier Summanden addieren sich also und heben sich nicht weg). Da die Funktionen $z \mapsto \wp_{2\Omega}(z+\omega_i)$ für $i \in \{1,2,3\}$ in 0 holomorph und daher in eine Potenzreihe entwickelbar sind, ist die LAURENTreihe von g um den Punkt 0 gegeben durch

$$g(z) = z^{-2} + a_0 + \ldots,$$

wobei $a_0 = \wp_{2\Omega}(0+\omega_1) + \wp_{2\Omega}(0+\omega_2) + \wp_{2\Omega}(0+\omega_3) = e_1^{(2\Omega)} + e_2^{(2\Omega)} + e_3^{(2\Omega)}$. Die holomorphe Fortsetzung von $g - \wp_\Omega$ ist somit eine ganze Funktion, nach dem ersten Satz von LIOUVILLE also konstant. Es folgt $g - \wp_\Omega = a_0$ bzw. $g = a_0 + \wp_\Omega$. $\diamond$

(3.6) Beispiel

Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ beliebige komplexe Zahlen, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebiges Gitter, (ω_1, ω_2) eine beliebige Basis von Ω sowie $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$. Ist $a \equiv b \pmod{\Omega}$, so folgt aus der Periodizität elliptischer Funktionen, dass alle $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, welche in a und b holomorph sind, auch $f(a) = f(b)$ erfüllen. Nehmen wir also umgekehrt an, dass $a \not\equiv b \pmod{\Omega}$. Wir betrachten die elliptische Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ definiert durch $f(z) := \wp(z - a + \frac{\omega_3}{2})$ für $b - a \notin \frac{\omega_3}{2} + \Omega$ bzw. $f(z) := \wp(z - a + \frac{\omega_1}{2})$ für $b - a \in \frac{\omega_3}{2} + \Omega$. Nach dieser Wahl hat f in a und b keine Polstellen, d.h. f ist in a und b holomorph. Da a jedoch nach dem dritten Satz von Liouville, Satz (1.9) im Vortrag vom 23.11.2005, und Korollar (2.7) aus dem gleichen Vortrag die einzige $f(a)$-Stelle im Periodenparallelogramm P ist, folgt $f(a) \neq f(b)$ wegen $b - a \notin \Omega$. Wir haben also gezeigt, dass es genau dann eine elliptische Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ gibt, die in zwei vorgegebenen Punkten a und b holomorph ist und $f(a) \neq f(b)$ erfüllt, wenn $a \not\equiv b \pmod{\Omega}$ ist. $\diamond$