Die LIOUVILLE'schen Sätze

Vortrag zum Seminar „Elliptische Funktionen und elliptische Kurven“, 23.06.2005

Marcel Carduck

Es sei stets Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω. Weiter bezeichne $P := \Diamond\,(u; \omega_1, \omega_2) := \{u + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\ ; 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1\}$ das Periodenparallelogramm zum Basispunkt $u \in \mathbb{C}$.

§ 1 Die vier Sätze von LIOUVILLE

Mit den Methoden aus der Funktionentheorie der Ana IV lassen sich bereits erhebliche Einschränkungen von elliptischen Funktionen zeigen. Dies bemerkte erstmals J. Liouville (1809-1882). In diesem Abschnitt werden wir die vier Sätze von LIOUVILLE beweisen und aus diesen bereits erste Folgerungen für elliptische Funktionen herleiten. Wir erhalten bereits genaue Angaben über die Anzahl der Pol- und Nullstellen und deren Lage im Periodenparallelogramm $P = \Diamond(u; \omega_1, \omega_2)$.

(1.1) Satz
Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ holomorph, so ist f konstant. ◇

Beweis
Sei $P := \Diamond(u; \omega_1, \omega_2)$ ein Periodenparallelogramm. Da f ganz auf $\mathbb{C}$ ist, ist f insbesondere stetig auf $\mathbb{C}$. Da $\overline{P}$ kompakt ist, ist dann $f(\overline{P})$ als Bild einer stetigen Funktion ebenfalls kompakt.
Somit existiert ein $C \geq 0$, so das für alle $z \in \overline{P}$ gilt: $\mid f(z) \mid \leq C$. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gibt es nach Proposition (1.6A) ein eindeutig bestimmtes $\omega \in \Omega$ so dass $z + \omega \in P$. Damit erhält man

$$\mid f(z) \mid = \mid f(z+\omega) \mid \leq C.$$

Da $z \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt war, ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach dem Satz von LIOUVILLE aus der Ana IV ist f konstant. □

Als Anwendung des Satzes betrachten wir das

(1.2) Beispiel
Sei f eine ganze Funktion. Zu jedem $\omega \in \Omega$ gebe es ein $c(\omega) \in \mathbb{C}$, so dass $f(z+\omega) = f(z) + c(\omega)$. Für die Ableitung gilt dann

$$f'(z+\omega) = (f(z) + c(\omega))' = f'(z) \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

Das heisst $f' \in \mathcal{K}(\Omega)$ und holomorph auf $\mathbb{C}$, also konstant nach Satz (1.1). Damit erhalten wir $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$.
Weiter ist $a(z+\omega) + b = az + b + \underbrace{a\omega}_{=:c(\omega)}$, also ist $f(z) = az + b$ von der Form. ◇

Wir können eine Aussage über die Anzahl der Pole in verschiedenen Periodenparallelogrammen treffen.

(1.3) Lemma
Es seien $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, P_1 und P_2 zwei Periodenparallelogramme. Dann gilt
(i) *Die Anzahl der Pole von f in P ist gleich der Anzahl der Pole von f in P'.*
(ii) $\operatorname{res}_c f = \operatorname{res}_{c+\omega} f$ *für alle $\omega \in \Omega$ und für alle $c \in \mathbb{C}$.*
(iii) $\operatorname{ord}_c f = \operatorname{ord}_{c+\omega} f$ *für alle $\omega \in \Omega$ und für alle $c \in \mathbb{C}$.*
(iv) *P_1 und P_2 lassen sich mittels $\pi_2^{-1} \circ \pi_1 : P_1 \longrightarrow P_2$ bijektiv aufeinander abbilden. Dabei bezeichnet $\pi_j : P_j \longrightarrow \mathbb{C}/\Omega$ die kanonische Projektion, für $j \in \{1, 2\}$.* ◇

Beweis
(i) Seien $a_1, \ldots, a_r$ die Polstellen von f in P. Dann existieren nach Proposition (1.6A) eindeutig bestimmte $\omega_1, \ldots, \omega_r$, so dass $a_1 + \omega_1, \ldots, a_r + \omega_r \in P'$ sind. Weil $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ ist, sind dies auch Polstellen in P'. Angenommen es gebe eine weitere Polstelle $b \in P'$, dann exiestiert ein $\omega \in \Omega$ so dass $b + \omega$ eine Polstelle in P ist. Also ist $b = a_j + \omega_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$.
(ii) + (iii) Betrachtet man in einer geeigneten Umgebung U_δ von c die LAURENTentwicklung von f in c

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z-c)^n \ , a_m \neq 0,$$

dann ist die Ordnung von f in c gleich m und das Residuum ist gleich a_{-1}. Wegen

$$f(z) = f(z + \omega - \omega) \overset{f \in \mathcal{K}(\Omega)}{=} f(z - \omega) = \sum_{n \geq m} a_n (z - [c + \omega])^n$$

für alle z mit $z - \omega \in U_\delta$ und der Eindeutigkeit der LAURENTentwicklung folgt daher $\operatorname{res}_c f = \operatorname{res}_{c+\omega} f$ und $\operatorname{ord}_c f = \operatorname{ord}_{c+\omega} f$ für alle $\omega \in \Omega$ und für alle $c \in \mathbb{C}$.
(iv) Vortrag „Gitterinvarianten" Satz (1.2) □

Damit macht folgende Definition einen Sinn.

(1.4) Definition
Sei $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und P ein Periodenparallelogramm. Zählt man nun die Polstellen von f in P, wobei die Vielfachheiten jeweils durch die Wiederholung der Punkte angegeben werden und sei die Anzahl $= r$. Dann nennt man r die Ordnung der elliptischen Funktion f.

Man beachte, dass diese Ordnung sich von der Ordnung einer meromorphen Funktion in einer Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ *unterscheidet:* $\mathrm{ord}_{z_0} f = m$, *wobei* $f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n, a_m \neq 0$, *die* LAURENT*entwicklung von* f in z_0 *ist.* ◇

Mit dieser Definition erhalten wir eine andere Formulierung von Satz (1.1).

(1.5) Folgerung
Eine elliptische Funktion der Ordnung 0 *ist konstant.* ◇

Wir bezeichnen für $a, b \in \mathbb{C}$ die Verbindungsstrecke von a nach b mit

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto a + t(b-a).$$

Wir schreiben dafür $\gamma = [a, b]$.

(1.6) Lemma
Ist $f \in \mathcal{M}$ *und ist* $P = \{u + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\,; 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1\}$ *ein Periodenparallelogramm, so dass* f *holomorph auf* ∂P *ist, dann gilt*:

$$\int_{\partial P} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{[u,u+\omega_1]} f(z) - f(z+\omega_2)\,\mathrm{d}z + \int_{[u+\omega_2,u]} f(z) - f(z+\omega_1)\,\mathrm{d}z \qquad \diamond$$

Beweis
Der Rand ∂P des Periodenparallelogrammes werde o.B.d.A in positiver Orientierung durchlaufen. Dies ist stes durch Vertauschen von ω_1 und ω_2 zu erreichen, also nur eine Änderung der Bezeichnung. Dann ist

$$\partial P = \underbrace{[u, u+\omega_1]}_{\gamma_1} \oplus \underbrace{[u+\omega_1, u+\omega_1+\omega_2]}_{\gamma_2} \oplus \underbrace{[u+\omega_1+\omega_2, u+\omega_2]}_{\gamma_3} \oplus \underbrace{[u+\omega_2, u]}_{\gamma_4}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \gamma_3(t) &= u+\omega_1+\omega_2 + t(u+\omega_2 - (u+\omega_1+\omega_2)) \\ &= u+\omega_1 + t(u - (u+\omega_1)) + \omega_2 = \gamma_1^-(t) + \omega_2 \quad \text{und} \\ \gamma_2(t) &= \gamma_4^-(t) + \omega_1 \quad \forall\, t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\partial P} f(z)\,dz &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) - \int_{\gamma_1} f(z+\omega_2)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz - \int_{\gamma_4} f(z+\omega_1)\,dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) - f(z+\omega_2)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z) - f(z+\omega_1)\,dz. \end{aligned} \qquad \square$$

(1.7) Bemerkung
Ist $\mathrm{Im}(\omega_2) \neq 0$, so wird ∂P genau dann positiv durchlaufen wennn $\frac{\mathrm{Im}(\omega_1)}{\mathrm{Im}(\omega_2)} > 0$. Ist $\mathrm{Im}(\omega_1) \neq 0$, so wird ∂P genau dann positiv durchlaufen wennn $\frac{\mathrm{Im}(\omega_2)}{\mathrm{Im}(\omega_1)} > 0$. Der Fall $\mathrm{Im}(\omega_1) = \mathrm{Im}(\omega_2) = 0$ ist nicht möglich. ◇

Wir benötigen das Lemma für den Beweis von den folgenden

(1.8) Satz
Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und P ein Periodenparallelogramm, dann gilt

$$\sum_{c \in P} \mathrm{res}_c f = 0. \tag{1}$$

◇

Beweis
Da $\overline{P}$ kompakt ist, liegen nach Proposition (2.1) nur endlich viele Pole von f in P. Wegen $\mathrm{res}_c f = 0$ für alle $c \in P$, in denen f holomorph ist, ist die Summe endlich. Nach Lemma (1.3) ist die Summe (1) unabhängig von der Wahl des Periodenparallelogrammes. Wir können also P so wählen, dass keine Pole auf dem Rand ∂P liegen. Mittels des RESIDUENSATZes ergibt sich (beachte hierbei $n_{\partial P}(z) \equiv \pm 1$ auf $\mathring{P}$)

$$\pm 2\pi i \sum_{c \in P} \mathrm{res}_c f = \pm 2\pi i \sum_{c \in P \cap D_f} \mathrm{res}_c f = \int_{\partial P} f(z)\, dz$$

$$\overset{(1.6)}{=} \int_{[u, u+\omega_1]} \underbrace{(f(z) - f(z+\omega_2))}_{=0}\, dz + \int_{[u+\omega_2, u]} \underbrace{(f(z) - f(z+\omega_1))}_{=0}\, dz.$$

Da $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ ist, gilt $f(z) = f(z+\omega_j)$ für $j \in \{1, 2\}$, also sind die Integranden gleich 0, und somit folgt die Behauptung (1). □

Direkt aus diesem Satz erhalten wir die

(1.9) Folgerungen
Es gibt keine elliptische Funktion f erster Ordnung. f muss wenigstens einen Pol zweiter Ordnung (mit Residuum 0) oder zwei Pole erster Ordnung in jedem Periodenparallelogramm besitzen. ◇

Um den nächsten Satz zu beweisen benötigen wir noch das

(1.10) Lemma
Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, $u \in \mathbb{C}$ und P ein Periodenparallelogramm, dann ist

$$g(z) := \frac{f'(z)}{f(z) - u} \in \mathcal{K}(\Omega) \text{ und es gilt } \mathrm{res}_c g = \mathrm{ord}_c(f - u) \quad \text{für alle } c \in P.$$

Weiter hat g nur Pole erster Ordnung. ◇

Beweis
Da $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ ist liegt auch $f' \in \mathcal{K}(\Omega)$. Weil $\mathcal{K}(\Omega)$ Unterkörper von $\mathcal{M}$ ist gilt damit auch $g \in \mathcal{K}(\Omega)$. Seien $a_1, \ldots, a_r$ die Nullstellen von $f-u$ in P mit den entsprechenden Vielfachheiten $k_{a_1}, \ldots, k_{a_r}$, sowie $b_1, \ldots, b_s$ die Polstellen von $f-u$ (und auch von f') mit Vielfachheiten $k_{b_1}, \ldots, k_{b_s}$. Nach der Ana IV hat f dann folgende Darstellung in einer geeigneten Umgebung der a_l für $l \in \{1, \ldots, r\}$

$$f(z) - u = (z-a_l)^{k_{a_l}} \widetilde{f}(z),$$

wobei $\widetilde{f}(z)$ holomorph in a_l und $\widetilde{f}(a_l) \neq 0$. Damit gilt für die Ableitung von f

$$f'(z) = k_{a_i}(z-a_l)^{k_{a_l}-1}\widetilde{f}(z) + (z-a_l)^{k_{a_l}}\widetilde{f}'(z).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{k_{a_l}(z-a_l)^{k_{a_l}-1}\widetilde{f}(z) + (z-a_l)^{k_{a_l}}\widetilde{f}'(z)}{(z-a_l)^{k_{a_l}}\widetilde{f}(z)} = \frac{k_{a_l}}{z-a_l} + \underbrace{\frac{\widetilde{f}'(z)}{\widetilde{f}(z)}}_{\text{holomorph}} \qquad (2) \\ \Rightarrow \quad & \operatorname{res}_{a_l} g = k_{a_l} = \operatorname{ord}_{a_l}(f-u). \end{aligned}$$

Weiter besitzt f nach der Ana IV in einer geeigneten Umgebung der b_m für $m \in \{1, \ldots, r\}$, die Darstellung

$$f(z) - u = \frac{1}{(z-b_m)^{k_{b_m}}}\widetilde{f}(z),$$

wobei $\widetilde{f}$ holomorph in b_m und $\widetilde{f}(b_m) \neq 0$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{-k_{b_m}}{(z-b_m)^{k_{b_m}+1}}\widetilde{f}(z) + \frac{\widetilde{f}'(z)}{(z-b_m)^{k_{b_m}}}, \text{ also} \\ g(z) &= \left(\frac{-k_{b_m} \cdot \widetilde{f}(z)}{(z-b_{k_m})^{k_{b_m}+1}} + \frac{\widetilde{f}'(z)}{(z-b_m)^{k_{b_m}}} \right) \cdot \frac{(z-b_m)^{k_{b_m}}}{\widetilde{f}(z)} = \frac{-k_{b_m}}{z-b_m} + \underbrace{\frac{\widetilde{f}'(z)}{\widetilde{f}(z)}}_{\text{holomorph}} \qquad (3) \\ \Rightarrow \quad & \operatorname{res}_{b_m} g = -k_{b_m} = \operatorname{ord}_{b_m}(f-u). \end{aligned}$$

Da sowohl f und g ansonsten holomorph sind, gilt insgesamt:

$$\operatorname{ord}_c(f-u) = \operatorname{res}_c g \quad \forall c \in P.$$

Speziell hat g mit (2) und (3) in den Punkten $a_1, \ldots, a_r$ und $b_1, \ldots, b_s$ Pole erster Ordnung. $\square$

Damit können wir nun den folgenden Satz beweisen.

(1.11) Satz
Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ nicht konstant und P ein Periodenparallelogramm, dann gilt für jedes $u \in \mathbb{C}$

$$\sum_{c \in P} \mathrm{ord}_c(f-u) = 0.$$

Betrachtet man die Summanden die ungleich Null sind, so resultieren die negativen Beiträge genau von den Polstellen von $f-u$ und die positiven Beiträge aus den Nullstellen von $f-u$. D. h. wenn man die entsprechenden Vielfachheiten mitzählt ist die

Anzahl der Pole von f = Anzahl der Nullstellen von f = Anzahl der u-Stellen von f. $\diamond$

Beweis
Nach Lemma (1.10) ist $g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)-u}$ wieder elliptisch bezgl. Ω und es gilt

$$\mathrm{res}_c g \;=\; \mathrm{ord}_c(f-u).$$

Mit Satz (1.8) folgt dann

$$\sum_{c \in P} \mathrm{ord}_c(f-u) \;=\; \sum_{c \in P} \mathrm{res}_c g \;=\; 0 \qquad \square$$

Auch aus diesem Satz können wir direkt einige Folgerungen ziehen.

(1.12) Folgerung
Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ nicht konstant und P ein Periodenparallelogramm, so ist $f(P) = \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, da f nach Satz (1.1) *wenigstens einen Pol in P hat. Insbesondere nimmt jede nicht konstante elliptische Funktion in P jeden Wert in $\hat{\mathbb{C}}$ gleichoft (mit Vielfachheiten) an.*
Die Anzahl der u-Stellen in P mit einer Vielfachheit $k > 1$ ist endlich, da f' genau $r \in \mathbb{N}$ Nullstellen in P hat, wobei r die Ordnung von f' ist. $\diamond$

Wir erhalten den vierten Satz von LIUOVILLE.

(1.13) Satz
Ist $0 \not\equiv f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und P ein Periodenparallelogramm, so gilt

$$\sum_{c \in P} c \cdot (\,\mathrm{ord}_c f\,) \;\in \Omega. \tag{4}$$

$\diamond$

Beweis
Wie im Beweis von Satz (1.8) wollen wir ebenfalls den RESIDUENSATZ anwenden. Dazu sei P so gewählt, dass keine Polstellen und auch keine Nullstellen auf dem Rand ∂P liegen. Dies kann, da die Null- und Polstellenmenge in P endlich sind, o.B.d.A. vorrausgesetzt werden. Weiter gilt:

$$\mathrm{ord}_c f \overset{(1.10)}{=} \mathrm{res}_c \frac{f'}{f} \Rightarrow c \cdot \mathrm{ord}_c f = c \cdot \mathrm{res}_c \frac{f'}{f} \quad \forall\, c \in P.$$

Weiter ist, da nur endlich viele Summanden ungleich 0 sind,

$$\sum_{k=1}^{r} (c_k + \omega_k)\, \mathrm{ord}_{c_k+\omega_k} f = \sum_{k=1}^{r} c_k \cdot \mathrm{ord}_{c_k} f + \omega \quad \text{wobei } \omega = \sum_{k=1}^{r} \omega_k.$$

Daher ist die Ausage invariant unter dem Wechsel der Periodenparallelogramme. Da $\frac{f'(z)}{f(z)}$ nach Lemma (1.10) nur einfache Pole besitzt und $g(z) := z$ holomorph ist gilt $c \cdot \mathrm{res}_c \frac{f'(z)}{f(z)} = \mathrm{res}_c z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$. Mit dem RESIDUENSATZ erhält man daher ($n_{\partial P}(z) \equiv \pm 1$ auf $\mathring{P}$)

$$\begin{aligned}
&\pm 2\pi i \sum_{c \in P} c \cdot \mathrm{ord}_c f = \pm 2\pi i \sum_{c \in P} c \cdot \mathrm{res}_c \frac{f'}{f} = \int_{\partial P} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \\
\overset{(1.6)}{=} &\int_{[u,u+\omega_1]} z\frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega_2)\frac{f'(z+\omega_2)}{f(z+\omega_2)}\, dz + \int_{[u+\omega_2,u]} z\frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega_1)\frac{f'(z+\omega_1)}{f(z+\omega_1)}\, dz \\
= \;&\omega_1 \cdot \int_{[u,u+\omega_2]} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \omega_2 \cdot \int_{[u,u+\omega_1]} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz
\end{aligned} \tag{5}$$

Im letzten Schritt wurde $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ ausgenutzt. Es ist nun nach Vorrausetzung $\frac{f'(z)}{f(z)}$ in einer Umgebung von $\mathrm{Spur}([u, u+\omega_j]), j \in \{1,2\}$ holomorph. Betrachtet man nun

$$\widetilde{\gamma}_j := f \circ [u, u+\omega_j] : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C},$$

dann ist $\widetilde{\gamma}_j$, für $\gamma_j := [u, u+\omega_j]$, ein Weg mit

$$\widetilde{\gamma}_j(0) = f(\gamma_j(0)) = f(u), \quad \widetilde{\gamma}_j(1) = f(\gamma_j(1)) = f(u+\omega_j) \overset{f \in \mathcal{K}(\Omega)}{=} f(u).$$

Somit ist $\widetilde{\gamma}_j$ geschlossener Weg, für den gilt

$$\begin{aligned}
2\pi i\mathbb{Z} \ni 2\pi i \cdot n_{\widetilde{\gamma}_j}(0) &= \int_{\widetilde{\gamma}_j} \frac{1}{w}\, dw = \int_I \frac{1}{\widetilde{\gamma}_j(t)} \cdot \widetilde{\gamma}_j{}'(t)\, dt \\
&= \int_I \frac{f'(\gamma_j(t))}{f(\gamma_j(t))} \cdot \gamma_j'(t)\, dt = \int_{\gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,
\end{aligned}$$

wobei $n_{\widetilde{\gamma}_j}(0)$ die Umlaufzahl von $\widetilde{\gamma}_j$ um 0 bezeichnet. Damit gilt also mit (5)

$$\pm 2\pi i \sum_{c\in P} c \cdot \operatorname{ord}_c f = \omega_1 \cdot 2\pi i k_1 - \omega_2 \cdot 2\pi i k_2 \quad \text{mit } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Teilt man nun durch $2\pi i$ so folgt (4). □

Wir betrachten ein weiteres

(1.14) Beispiel
Sei $0 \not\equiv f \in \mathcal{M}$, so dass es zu jedem $\omega \in \Omega$ ein $c(\omega) \in \mathbb{C}$ gilt mit $f(z+\omega) = f(z)c(\omega)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$. Zu zeigen:
(i) $\operatorname{ord}_c f = \operatorname{ord}_{c+\omega} f \;\forall\, z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega$.
(ii) $\sum_{c\in P} \operatorname{ord}_c f = 0$.
(iii) Ist f ganz, so existieren $a, b \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = ae^{bz}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Vorbemerkung:

Für alle $\omega \in \Omega$ gilt $c(\omega) \neq 0$. Denn angenommen es existiert ein $\omega \in \Omega$ mit $c(\omega) = 0$. Dann ist

$$f(z+\omega) = c(\omega)f(z) = 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \setminus D_f.$$

Weil aber $\mathbb{C} \setminus D_f$ nicht diskret in $\mathbb{C}$ ist folgt mit dem Identitätssatz $f \equiv 0$ im Widerspruch zur Vorraussetzung. Also gilt für alle $\omega \in \Omega$ daher $c(\omega) \neq 0$.
Betrachtet man die Ableitung so ist $f'(z+\omega) = (c(\omega)f(z))' = c(\omega)f'(z)$.

zu (i):
f habe in einer Umgebung U von c die LAURENTenwicklung

$$f(z) = \sum_{n\geq m} a_n (z-c)^n, a_m \neq 0.$$

Für $\omega \in \Omega$ und für alle $z \in \omega + U$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z+\omega-\omega) = c(\omega)f(z-\omega) \\ &\overset{z-\omega\in U}{=} c(\omega) \sum_{n\geq m} a_n (z-[c+\omega])^n. \end{aligned}$$

Weil $\omega \in \Omega$ und $c \in \mathbb{C}$ beliebig waren, gilt daher

$$\operatorname{ord}_c f = \operatorname{ord}_{c+\omega} f \quad \forall\, \omega \in \Omega \text{ und } \forall\, c \in \mathbb{C}.$$

zu (ii):
Hierzu werden wir den Beweis von Satz (1.13) nachvollziehen. Es gilt $\operatorname{ord}_c f = \operatorname{res}_c \frac{f'}{f}$

für alle $c \in P$. Wie auch im Beweis von Satz (1.8) sei P so gewählt, dass keine Pole auf dem Rand ∂P liegen. Dann gilt mit dem RESIDUENSATZ

$$\pm 2\pi i \sum_{c\in P} \mathrm{ord}_c f = \pm 2\pi i \sum_{c \in P} \mathrm{res}_c f = \int\limits_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Mit dem Lemma (1.6) ist dies dann

$$\begin{aligned} &\overset{(1.6)}{=} \int\limits_{[u,u+\omega_1]} \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(z+\omega_2)}{f(z+\omega_2)}\, dz + \int\limits_{[u+\omega_2,u]} \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(z+\omega_1)}{f(z+\omega_1)}\, dz \\ &= \int\limits_{[u,u+\omega_1]} \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{c(\omega_2)f'(z)}{c(\omega_2)f(z)}\, dz + \int\limits_{[u+\omega_2,u]} \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{c(\omega_1)f'(z)}{c(\omega_1)f(z)}\, dz = 0, \end{aligned}$$

da $f(z+\omega_j) = c(\omega_j)f(z)$ und $f'(z+\omega_j) = c(\omega_j)f'(z)$, $j \in \{1,2\}$, gilt.
zu (iii):
Weil f ganz ist, folgt $\mathrm{ord}_c f \geq 0$ für alle $c \in \mathbb{C}$, da f keine Pole hat. Mit (ii) ist dann $\mathrm{ord}_c f = 0$ für alle $c \in \mathbb{C}$. Damit ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit ist $\frac{f'}{f}$ ebenfalls ganz und es gilt

$$\frac{f'(z+\omega)}{f(z+\omega)} = \frac{c(\omega)f'(z)}{c(\omega)f(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathcal{K}(\Omega).$$

Nach Satz (1.1) ist $\frac{f'}{f}$ konstant und somit $f' = bf$ für ein $b \in \mathbb{C}$, d. h. $f(z) = ae^{bz}$ für $a, b \in \mathbb{C}$. ◇

Wir betrachten zum Abschluss des Paragraphen noch die

(1.15) Bemerkung
(a) Zählt man die Nullstellen eines nichtkonstanten $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit den Vielfachheiten, so gibt es nach Satz (1.11) Punkte $a_1, \ldots, a_r$ und $b_1, \ldots, b_r$ aus P, so dass f genau in $a_1, \ldots, a_r$ Nullstellen und genau in $b_1, \ldots, b_r$ Pole hat. Dabei wird die Vielfachheit durch die Anzahl der Wiederholungen angegeben. Damit schreibt sich die Aussage aus Satz (1.13) in der Form

$$a_1 + \ldots + a_r \equiv b_1 + \ldots + b_r \mod \Omega. \tag{6}$$

(b) Wir werden später sehen, dass man mittels (6) eine elliptische Funktion der Ornung $r \geq 2$ mit vorgeschriebenen Null- und Polstellen konstruieren kann. ◇

§2 Existenzsatz

Wir werden uns in diesem Paragraphen mit einer möglichst „einfachen" (Ordnung 2) elliptischen Funktion befassen. Wir werden erste Eigenschaften dieser Funktion zeigen und eine Differentialgleichung für sie herleiten. Später werden wir sehen, dass es gelingt mit ihr eine Beschreibung aller elliptischen Funktionen zu folgern.

Ohne Beweis benutzen wir den

(2.1) Existenzsatz
Es gibt eine elliptische Funktion $\wp$, die genau in jedem Gitterpunkt von Ω einen Pol der Ordnung 2 hat und ansonsten holomorph ist. Ihre LAURENT*reihe bei 0 hat die Form*

$$\wp(z) = z^{-2} + a_1 z + \dots$$ ◇

Wir erhalten sofort das

(2.2) Korollar
$\wp$ ist durch die LAURENT-*Reihe eindeutig bestimmt und hat in allen Polstellen das Residuum 0.* ◇

Beweis
Sei φ ebenfalls von der Form, d. h. $\varphi(z) = z^{-2} + a'_1(z) + \cdots$ in einer Umgebung von 0. Betrachte nun $f(z) := \wp(z) - \varphi(z)$. f hat nach (2.1) bei 0 die LAURAUNTreihe

$$f(z) = z^{-2} - z^{-2} + (a_1 - a'_1)z + \dots$$

Damit ist f auf P holomorhp und somit auf ganz $\mathbb{C}$ und nach Satz (1.1) konstant. Wegen $f(0) = 0$ ist $\varphi = \wp$.
Wegen $\mathrm{res}_0 \wp = \mathrm{res}_{0+\omega} \wp = res_\omega \wp$ für alle $\omega \in \Omega$ hat $\wp$ in allen Polen das Residuum 0.
Man nennt $\wp$ die WEIERSTRASS'sche $\wp$-Funktion (zum Gitter Ω). □

Wir erhalten erste Eigenschaften der WEIERSTRASS'schen $\wp$-Funktion.

(2.3) Proposition
a) *$\wp$ ist eine gerade Funktion, d. h. $\wp(-z) = \wp(z) \, \forall\, z \in \mathbb{C}$. Weiterhin gilt $a_1 = a_3 = \ldots = 0$ in* Satz (2.1).
b) *$\wp'$ ist eine ungerade Funktion die in allen Gitterpunkten von Ω Pole dritter Ordnung hat und ansonsten holomorph ist.* ◇

Beweis
a) Betrachte $f(z) := \wp(z) - \wp(-z)$. Dann ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und f ist in 0 holomorph und somit nach Satz (1.1) konstant. Wegen $f(0) = 0$ ergibt sich $f \equiv 0$. Da f bei 0 die LAURENTentwicklung

$$\begin{aligned} f(z) &= z^{-2} - (-z)^{-2} + a_1 z - a_1(-z) + a_2 z^2 - a_2(-z)^2 + a_3 z^3 - a_3(-z)^3 + \ldots \\ &= 2a_1 z + 2a_3 z^3 + \ldots \end{aligned}$$

besitzt, ergibt sich $a_1 = a_3 = \ldots = 0$.
b) Da die LAURENTreihe von $\wp$ bei 0 absolut konvergiert, können wir gliedweise differenzieren und erhalten

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \ldots.$$

Da nun $\wp$ bei jedem Gitterpunkt $\omega \in \Omega$ wegen Lemma (1.3) die LAURENTenwicklung

$$(z-\omega)^2 + a_2(z-\omega)^2 + \ldots$$

besitzt, hat dort auch $\wp'$ einen Pol dritter Ordnung. Da nur ungerade Potenzen in der LAURENTreihe auftreten, ist $\wp'$ eine ungerade Funktion. □

Wir können nun bereits alle Nullstellen von $\wp'$ angeben.

(2.4) Lemma
Ist $\omega \in \Omega$, aber $\omega/2 \notin \Omega$, dann ist $\omega/2$ *eine einfache Nullstelle von $\wp'$. Umgekerht ist jede Nullstelle von $\wp'$ von dieser Form.* ◇

Beweis
Da $\wp'$ eine ungerade elliptische Funktion ist, gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ die Gleichung

$$\wp'(z+\omega) = \wp'(z) = -\wp'(-z) \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \tag{7}$$

Da nach Vorraussetzung $-\omega/2 \notin \Omega$, kann man $-\omega/2$ in (7) einsetzen und man erhält

$$\wp'(\omega/2) = -\wp'(\omega/2) \Rightarrow \wp'(\omega/2) = 0$$

Sei nun (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω und $P = \Diamond(\omega_1, \omega_2)$. Dann hat $\wp'$ in P die Nullstellen $\omega_1/2, \omega_2/2$ und $(\omega_1 + \omega_2)/2$. Da $\wp'$ in P nur einen Pol dritter Ordnung bei 0 hat, sind dies nach Satz (1.11) alle Nullstellen in P und haben Vielfachheit 1.
Noch zu zeigen: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\wp'(z) = 0$ folgt $z = \omega/2$ für ein $\omega \in \Omega$.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ eine beliebige Nullstelle von $\wp'$. Dann existiert nach Proposition (1.6A) genau ein $\omega_z \in \Omega$, so dass $z - \omega_z \in P$ und $\wp'(z - \omega_z) = 0$. Damit gilt für z nach dem ersten Teil

$$z = \omega_j/2 + \omega_z \notin \Omega,$$

da $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ist. Also ist z von der Form $\omega/2$ für ein $\omega \in \Omega$ mit $\omega/2 \notin \Omega$. □

Damit können wir jetzt eine Aussage über die Vielfachheit der z-Stellen von $\wp$ treffen.

(2.5) Lemma
Sei P ein Periodenparallelogramm. Zu $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z \neq \wp(\omega/2), \quad \omega \in \Omega, \quad \omega/2 \notin \Omega \tag{8}$$

gibt es genau zwei verschiedene $u, v \in P$ mit $\wp(u) = \wp(v) = z$. In diesem Fall gilt $(u+v) \in \Omega$. Gibt es umgekehrt zwei verschiedene Werte $u, v \in P$ mit $\wp(u) = \wp(v) = z$, so folgt (8).$\diamond$

Beweis
Nach Satz (1.11) ist die Anzahl der z-Stellen (mit Vielfachheit) in P gleich 2.
Fall 1: Sei $u \in P$ doppelte z-Stelle, also $\wp'(u) = 0$. Mit Lemma (2.4) folgt $u = \omega/2$ für ein $\omega \in \Omega$ mit $\omega/2 \notin \Omega$ im Widerspruch zu (8). Also tritt dieser Fall nicht ein.

Fall 2: Es existieren genau zwei verschiedene $u, v \in P$ mit $\wp(u) = \wp(v) = z$. Dann ist

$$\sum_{c \in P} c \cdot \operatorname{ord}_c(\wp - z) = \omega \cdot (-2) + 1 \cdot u + 1 \cdot v = -2\omega + (u+v) \in \Omega$$

nach Satz (1.13). Damit ist auch $u + v \in \Omega$. $\square$

Wir führen nun eine Standartbezeichnung ein.

(2.6) Definition
Sei (ω_1, ω_2) Basis von Ω und setze $P := \lozenge(\omega_1, \omega_2)$. Wir definieren

$$e_k := \wp(\omega_k/2), \quad k \in \{1,2,3\} \quad \text{mit } \omega_3 := \omega_1 + \omega_2. \tag{9}$$

$\diamond$

Dies führt uns zu dem

(2.7) Korollar
(a) $\wp(z) - e_k$ hat genau eine doppelte Nullstelle in P für $k \in \{1,2,3\}$.
(b) $\wp(z) - u$ hat zwei einfache Nullstellen in P für $u \neq \omega_k/2$, $k \in \{1,2,3\}$.
(c) e_1, e_2, e_3 sind paarweise verschieden. $\diamond$

Beweis
(a) Nach Lemma (2.4) ist ω_k doppelte Nullstelle von $\wp - e_k$. Weil $\wp - e_k$ in P nur einen Pol zweiter Ordnung hat, ist dies nach Satz (1.11) die einzige.
(b) Nach Satz (1.11) hat $\wp - u$ zwei Nullstellen (mit Vielfachheit). Da $u \neq \omega_k/2$ ist, existieren nach Lemma (2.5) zwei verschiedene $s, t \in P$ mit $\wp(s) = \wp(t) = u$.
(c) Angenommen es ist $e_1 = e_2$, dann hat $\wp(z) - e_1$ nach Korollar (a) die beiden doppelten Nullstellen $\omega_1/2$ und $\omega_2/2$, im Widerspruch zu Satz (1.11). $\square$

Nun haben wir genügend Mittel zur Verfügung, um eine erste Differentialgleichung für die WEIERSTRASS'sche-$\wp$-Funktion herzuleiten.

(2.8) Satz
Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ *gilt die Differentialgleichung*

$$\wp'(z)^2 = 4 \underbrace{(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)}_{=:f(z)}. \qquad (10) \quad \diamond$$

Beweis
Sei $P := \Diamond(\omega_1, \omega_2)$. Dann wissen wir nach Korollar (2.7), dass f genau die drei doppelten Nullstellen $\omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2$ in P hat, sowie genau einen Pol der Ordnung 6 in 0. Ebenso hat $\wp'^2$ nach Lemma (2.4) genau die drei doppelten Nullstellen

$$\omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2$$

in P sowie einen Pol von Ordnung 6 in 0. Bildet man nun den Quotienten $\frac{\wp'^2}{f}$, so heben sich die Nullstellen des Nenners mit denen des Zählers auf; ebenso hebt der Pol des Nenners den des Zählers auf. Somit ist $\frac{\wp'^2}{f}$ holomorh auf P und damit auf ganz $\mathbb{C}$, also konstant mit Satz (1.1). Betrachtet man die LAURENTentwicklung um 0

$$\wp(z) = z^{-2} + \ldots, \quad \wp'(z) = -2z^{-3} + \ldots,$$

so sieht man, dass die Konstante gleich 1 ist, da in der Nähe von Null in (10) nur die Koeefizienten von z^{-6} eine Rolle spielen. Damit folgt $\wp'^2 = f$ und somit die Behauptung des Satzes. □

Die Definition der e_k aus (9) hängt von der Wahl der Basis (ω_1, ω_2) von Ω ab. Dazu die

(2.9) Bemerkung
Bei einem Wechsel der Basis von Ω werden die Werte e_1, e_2, e_3 nur permutiert. Denn sei (ω_1', ω_2') eine weitere Basis von Ω. Dann existiert nach dem Basislemma ein

$$M \in GL(2, \mathbb{Z}), M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{so dass } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}, \text{d. h.}$$

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2 \text{ und } \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 \text{ mit } \det(M) = ad - bc = \pm 1.$$

Dann ist z. B.

$$\wp(\omega_1'/2) = \wp\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{2}\right) = \begin{cases} c\wp(\omega_1/2), & \text{falls } b \text{ gerade und } a \text{ ungerade,} \\ \wp(\omega_2/2), & \text{falls } a \text{ gerade und } b \text{ ungerade,} \\ \wp((\omega_1 + \omega_2)/2), & \text{falls } a \text{ und } b \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Der Fall a und b beide gerade ist nicht möglich, da dann $ac - bd \in 2\mathbb{Z}$ wäre. Für ω_2' und ω_3' erhält man analoge Aussagen und wegen Korollar (2.7) sind e_1', e_2', e_3' paarweise verschieden. $\diamond$

Eine Verschärfung der Bemerkung beinhaltet die

(2.10) Proposition
Zu e_1, e_2, e_3 definiert man $\overline{e_1} := (1,0), \overline{e_2} := (0,1), \overline{e_3} := (1,1) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Für eine weitere Basis (ω_1', ω_2') von Ω wobei

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2 \quad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 \text{ mit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{Z}),$$

betrachtet man $\overline{M} \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, dass aus M durch Reduktion der Komponenten modulo 2 ensteht.
Dann permutiert $\overline{M}$ die Menge $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ und es gilt

$$\overline{e_j} \cdot \overline{M} = \overline{e_j'} \quad \text{für } j \in \{1,2,3\},$$

falls die $\overline{e_j'}$ die entsprechenden Größen zur neuen Basis bezeichnen. $\diamond$

Beweis
Wegen

$$\det \overline{M} = ad - bc \mod 2 = 1 \mod 2$$

ist $\overline{M} \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und operiert damit bijektiv auf der Menge $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.
Berechne jetzt die $\overline{e_j'}$:
Fall 1: a gerade
Dann folgt b, c sind ungerade und damit ist $e_1' = e_2$. Ist d ungerade, so ist $e_2' = e_3$ und $e_3' = e_1$ sowie $\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\overline{e_1} \cdot \overline{M} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0,1) = \overline{e_2} = \overline{e_1'}$$

$$\overline{e_2} \cdot \overline{M} = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,1) = \overline{e_3} = \overline{e_2'}$$

$$\overline{e_3} \cdot \overline{M} = (1,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,0) = \overline{e_1} = \overline{e_3'}$$

Ist d gerade, so ist $e_2' = e_1$ und $e_3' = e_3$ sowie $\overline{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\overline{e_1} \cdot \overline{M} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1) = \overline{e_2} = \overline{e_1'}$$

$$\overline{e_2} \cdot \overline{M} = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,0) = \overline{e_1} = \overline{e_2'}$$

$$\overline{e_3} \cdot \overline{M} = (1,1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,1) = \overline{e_3} = \overline{e_3'}$$

Fall 2: a ungerade
Ist d gerade, so folgt b, c sind ungerade. Also $e_1' = e_3$ und $e_2' = e_1$ sowie $e_3' = e_2$ sowie $\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\overline{e_1} \cdot \overline{M} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,1) = \overline{e_3} = \overline{e_1'}$$

$$\overline{e_1} \cdot \overline{M} = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1,0) = \overline{e_1} = \overline{e_2'}$$

$$\overline{e_3} \cdot \overline{M} = (1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1) = \overline{e_2} = \overline{e_3'}$$

Ist d ungerade, und b ungegade so folgt c ist gerade. Also ist $e_1' = e_3$ und $e_2' = e_2$ und $e_3' = e_1$ sowie $\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\overline{e_1} \cdot \overline{M} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1) = \overline{e_3} = \overline{e_1'}$$

$$\overline{e_2} \cdot \overline{M} = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,1) = \overline{e_1} = \overline{e_2'}$$

$$\overline{e_3} \cdot \overline{M} = (1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,0) = \overline{e_1} = \overline{e_3'}$$

Ist d ungerade, b gerade und c gerade so ist $e_j' = e_j$ und $\overline{M} = \overline{E_2}$ für $j \in \{1,2,3\}$.
Ist d ungerade, b gerade und c ungerade, so sind $e_1' = e_1$ und $e_2' = e_3$ und $e_3' = e_2$ sowie $\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\overline{e_1} \cdot \overline{M} = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,0) = \overline{e_1} = \overline{e_1'}$$

$$\overline{e_2} \cdot \overline{M} = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1,1) = \overline{e_3} = \overline{e_2'}$$

$$\overline{e_3} \cdot \overline{M} = (1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0,1) = \overline{e_2} = \overline{e_3'}$$

Der Fall a, b, c, d alle ungerade tritt nicht auf. Insgesamt gilt also

$$\overline{e_j} \cdot \overline{M} = \overline{e'_j} \quad \text{für } j \in \{1, 2, 3\}\,. \qquad \square$$