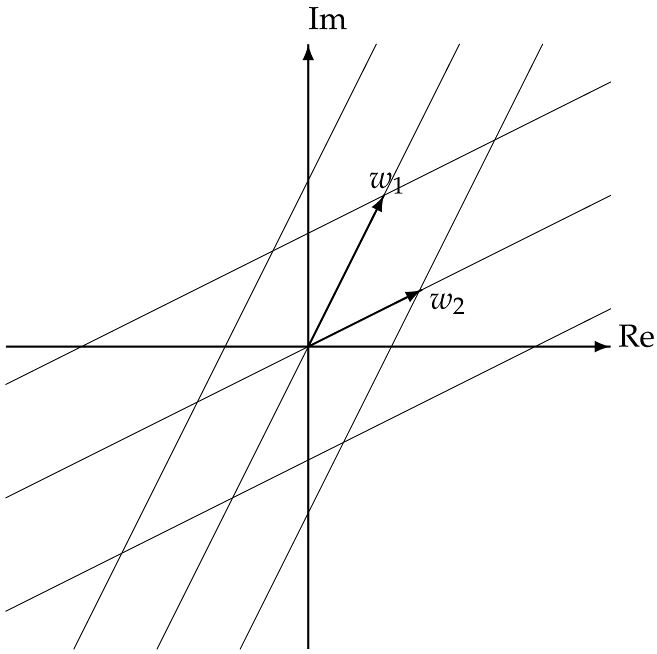
Gitterinvarianten

Vortrag zum Seminar „Elliptische Funktionen und elliptische Kurven“, 16.11.2005

Shuliang Xu



Betreuer: Prof. Dr. A. Krieg
Lehrstuhl A für Mathematik

§1 Die Faktorgruppe $\mathbb{C}/\Omega$

Sei $\Omega \leq (\mathbb{C};+)$. Wir erklären eine Äquivalenzrelation bezüglich Ω auf $\mathbb{C}$, stellen die Faktorgruppe $\mathbb{C}/\Omega$ vor und untersuchen, wie sie sich in $\mathbb{C}$ verhält.

(1.1) Bemerkung
Es sei Ω eine Untergruppe von $(\mathbb{C};+)$. Dann ist

$$a \equiv b(mod\Omega) \Longleftrightarrow a - b \in \Omega$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$, denn sie ist

- reflexiv: $a \equiv a$, denn $a - a = 0 \in \Omega$,
- symmetrisch: Da Ω Untergruppe von $(\mathbb{C};+)$, gilt mit $a - b \in \Omega$ auch $b - a = -(a - b) \in \Omega$,
- transitiv: $a \equiv b,\ b \equiv c \in \Omega \Rightarrow a - b + b - c = a - c \in \Omega$.

Die Äquivalenzklassen können dann in der Form $a + \Omega,\ a \in \mathbb{C}$, geschrieben werden. Da $(\mathbb{C};+)$ abelsch ist, ist jede Untergruppe von $(\mathbb{C};+)$ ein Normalteiler. Deswegen ist Ω als Untergruppe von $(\mathbb{C};+)$ ein Normalteiler. Die Faktorgruppe stimmt daher mit der Nebenklassenmenge überein und wird mit

$$\mathbb{C}/\Omega := \{a + \Omega;\ a \in \mathbb{C}\}$$

bezeichnet.
Die kanonische Projektion bezeichnen wir mit

$$\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Omega,\ \pi(a) := a + \Omega.$$

Wir beweisen nun, dass jede Äquivalenzklasse von $\mathbb{C}/\Omega$ einen eindeutigen Vertreter in jedem Periodenparallelogramm hat.

(1.2) Satz
Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit Basis (w_1, w_2). Weiterhin sei $P = \diamond(u; w_1, w_2) := \{u + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2;\ 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1\}$ ein Periodenparallelogramm. Dann ist die Restriktion

$$\pi\ |_P: P \longrightarrow \mathbb{C}/\Omega,\ \ p \longmapsto \pi(p) = p + \Omega,$$

bijektiv. $\diamond$

Beweis
i) Injektiv:
Seien $p_1, p_2 \in P$, mit

$$p_1 + \Omega = \pi(p_1) = \pi(p_2) = p_2 + \Omega$$

Dann folgt $p_2 - p_1 \in \Omega$. Da $p_1 \in P$ und $p_1 + (p_2 - p_1) = p_2 \in P$, folgt nach Proposition 6A $p_2 - p_1 = 0$.
II) Surjektiv:
Sei $a + \Omega \in \mathbb{C}/\Omega$, $a \in \mathbb{C}$. Nach Proposition 6A gibt es genau ein $\omega \in \Omega$ mit

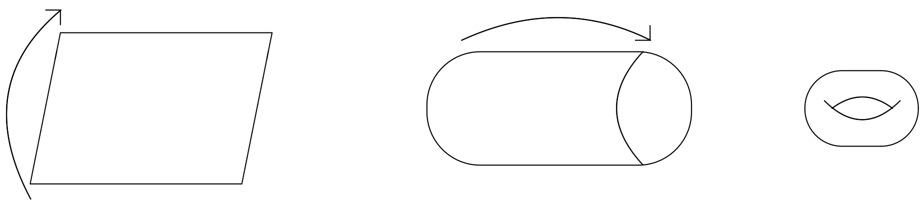
$$p := a + \omega \in P \Rightarrow \pi(p) = p + \Omega = a + \omega + \Omega = a + \Omega.$$

Somit ist π surjektiv, da man ein Urbild gefunden hat. □

(1.3) Bemerkungen
a) Bekanntlich ist die Addition in $\mathbb{C}/\Omega$ durch

$$(a + \Omega) + (b + \Omega) := (a + b) + \Omega$$

gegeben. Damit ist $\mathbb{C}/\Omega$ eine abelsche Gruppe mit Nullelement Ω.
b) Induziert man die Topologie von $\mathbb{C}$ mit der kanonischen Projektion nach $\mathbb{C}/\Omega$, betrachtet man also $\mathbb{C}/\Omega$ mit der Quotiententopologie, so wird $\mathbb{C}/\Omega$ zu einem kompakten topologischen Raum. Dabei heißt definitionsgemäß eine Teilmenge A von $\mathbb{C}/\Omega$ offen, wenn $\pi^{-1}(A)$ offen in $\mathbb{C}$ ist. Wegen Satz (1.2) kann man sich $\mathbb{C}/\Omega$ als *Torus* im $\mathbb{R}^3$ vorstellen. Man hat dazu lediglich die gegenüberliegenden Seiten eines Periodenparallelogramms zu identifizieren:



Wir erhalten folgendes

(1.4) Korollar
Sei Ω eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{C}; +)$. Dann sind äquivalent:
(i) Ω ist ein Gitter
(ii) Die Faktorgruppe $\mathbb{C}/\Omega$ ist kompakt. ◇

Beweis
(i)$\Rightarrow$(ii): Gilt nach Bemerkung (1.3)b).
(ii)$\Rightarrow$(i): Sei Ω eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{C}; +)$, dann gilt nach Bemerkung (1.3)b):
$a)$ $\Omega = \mathbb{Z}\omega,\ \omega$ ist Basis von Ω, oder
$b)$ $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, (ω_1, ω_2) Basis von Ω.
Annahme: $\Omega = \mathbb{Z}\omega$. Dann hat man die Situation:

Dies widerspricht der Kompaktheit von $\mathbb{C}/\Omega$. Dann ist $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, also ein Gitter. □

§ 2 Bemerkungen über mehrfach unendliche Reihen

In diesem Paragraphen definieren wir $n-$fach unendliche Reihen und betrachten die absolute Konvergenz solcher Reihen.

(2.1) Definition (n-fach unendliche Reihe)
a) Seien $g \in \mathbb{Z}^n$ und $\alpha_g \in \mathbb{C}$, dann heißt die Summe

$$\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \alpha_g$$

eine *n-fach unendliche Reihe*.
b) Die Reihe in a) heißt *absolut konvergent*,wenn es ein $C > 0$ gibt mit

$$\sum_{g \in E} |\alpha_g| < C$$

für jede endliche Teilmenge E von $\mathbb{Z}^n$. ◇

Wir erhalten den

(2.2) Satz
Eine absolute konvergente Reihe darf beliebig umgeordnet werden. $\diamond$

Beweis
Da $\mathbb{Z}^n$ unendlich abzählbar ist, gibt es eine Bijektion

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^n.$$

Sei weiterhin $\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \alpha_g$ absolut konvergent. Somit existiert ein $C > 0$, so dass für alle $E \subset \mathbb{Z}^n$, $\sharp E < \infty$, gilt

$$\sum_{g \in E} |\alpha_g| < C.$$

Wegen

$$\varphi(\{1,...,n\}) \subset \mathbb{Z}^n \text{ mit } \sharp\varphi(\{1,...,n\}) < \infty$$

gilt

$$|\sum_{k=1}^{n} \alpha_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{\varphi(k)}| < C, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist die Folge der Partialsummen von $\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_{\varphi(k)}|$ beschränkt, also ist $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_{\varphi(k)}$ absolut konvergent, darf daher nach Analysis I beliebig umgeordnet werden. Damit erhält man $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_{\varphi(k)} = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \alpha_g$. $\square$

§ 3 Gitterinvarianten

In diesem Paragraphen definieren wir den Durchmesser einer Grundmasche und die EISENSTEIN-*Reihen*. Dann zeigen wir, wie sich die EISENSTEIN-*Reihen* verhalten.

(3.1) Definition (Durchmesser einer Grundmasche)
Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit einer Basis (ω_1, ω_2). Dann definieren wir durch

(1) $$\delta := \delta(\omega_1, \omega_2) := sup\{|z - w|;\ z, w \in \diamond(\omega_1, \omega_2)\}$$

den *Durchmesser* der zugehörigen Grundmasche. $\diamond$

Wir benötigen eine weitere

(3.2) Definition (Anzahl der Gitterpunkte innerhalb eines Kreises)
Für $\rho > 0$ bezeichnen wir mit

$$A_\rho(\Omega) := \sharp\{\omega \in \Omega;\ |\omega| \leq \rho\},$$

die *Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Kreis um* 0 *mit Radius* ρ. $\diamond$

Man kann eine Aussage über die Anzahl $A_\rho(\Omega)$ der Gitterpunkte in $K_\rho(0), \rho > 0$, treffen. Das beinhaltet der folgende

(3.3) Satz
Für alle $\rho \geq \delta$ gilt

$$\frac{\pi}{vol(\Omega)}(\rho-\delta)^2 \leq A_\rho(\Omega) \leq \frac{\pi}{vol(\Omega)}(\rho+\delta)^2.$$

Beweis
Seien $\rho > \delta$ und

$$K_\rho := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho\} \ \ und \ \ M_\rho := \bigcup_{\omega\in\Omega, |\omega|\leq\rho} \diamond(\omega;\omega_1,\omega_2),$$

sowie $\delta := \delta(\omega_1,\omega_2)$ der Durchmesser der zugehörigen Grundmasche.
Dann folgt

$$K_{\rho-\delta} \subset M_\rho \subset K_{\rho+\delta}.$$

Betrachten wir die Flächen

$$F_{K_{\rho-\delta}} = \pi(\rho-\delta)^2,\ F_{M_\rho} = vol(\Omega)\cdot A_\rho(\Omega) \ \text{ und } \ F_{K_{\rho+\delta}} = \pi(\rho+\delta)^2$$

so erhalten wir daraus

$$\pi(\rho-\delta)^2 < vol(\Omega)\cdot A_\rho(\Omega) < \pi(\rho+\delta)^2.$$

Damit bekommen wir

$$\frac{\pi}{vol(\Omega)}(\rho-\delta)^2 \leq A_\rho(\Omega) \leq \frac{\pi}{vol(\Omega)}(\rho+\delta)^2, \text{ für alle } \rho \geq \delta.$$

Damit erhalten wir das

(3.4) Konvergenz-Lemma
Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$.
Die Reihe $\sum_{0\neq\omega\in\Omega} |\omega|^{-\alpha}$ *konvergiert genau dann, wenn* $\alpha > 2$. $\diamond$

Beweis
1. Möglichkeit des Beweises:
1. Fall: Sei $\alpha > 2$ und $\emptyset \neq E \subset \Omega \backslash \{0\}$ endlich sowie $M :=\max\{|\omega|;\ \omega \in E\}$.
Zu zeigen: $\sum_{0 \neq \omega \in E} |\omega|^{-\alpha} < \infty \Longrightarrow \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} |\omega|^{-\alpha} < \infty$, da E beliebige endliche Teilmenge von Ω ist (vgl. Definition(2.1),b)).
Aus dem Satz (3.3) wissen wir,

$$\frac{\pi}{vol(\Omega)}(n+1-\delta)^2 < A_{n+1}(\Omega) < \frac{\pi}{vol(\Omega)}(n+1+\delta)^2$$

und

$$\frac{\pi}{vol(\Omega)}(n-\delta)^2 < A_n(\Omega) < \frac{\pi}{vol(\Omega)}(n+\delta)^2.$$

Damit erhält man ein $c_2 > 0$ mit

$$0 \leq A_{n+1}(\Omega) - A_n(\Omega) \leq \frac{\pi}{vol(\Omega)}[(n+1+\delta)^2 - (n-\delta)^2]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{vol(\Omega)}[(n+1)^2 + \delta^2 + 2(n+1)\delta - n^2 - \delta^2 + 2n\delta] \\
&= \frac{\pi}{vol(\Omega)}(n^2 + 2n + 1 + \delta^2 + 2n\delta + 2\delta - n^2 - \delta^2 + 2n\delta) \\
&= \frac{\pi}{vol(\Omega)}(2n+1)(2\delta+1) \leq c_2 n \quad \text{für alle } n \geq \delta.
\end{aligned}$$

Wir definieren

$$c_1 := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega, |\omega| \leq \delta+1} |\omega|^{-\alpha}.$$

Weil $\alpha > 2$, ist $(n+1)^{-\alpha} \leq |\omega|^{-\alpha} \leq n^{-\alpha}$ für $n \leq |\omega| \leq n+1$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in E} |\omega|^{-\alpha} &\leq c_1 + \sum_{n \in \mathbb{N}, \delta < n < M} (A_{n+1}(\Omega) - A_n(\Omega)) n^{-\alpha} \\
&\leq c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_2 n n^{-\alpha} = c_1 + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\alpha} \\
&= : C < \infty.
\end{aligned}$$

Nach Definition (2.1)b) folgt damit die Behauptung.

2. Fall: Trivialerweise divergiert die Reihe für $\alpha \leq 0$.
Denn für $\alpha \leq 0$, ist $-\alpha \geq 0$ und damit gilt: $|\omega| \to \infty \Rightarrow |\omega|^{-\alpha} \to \infty$.

3. Fall: Sei $0 < \alpha \leq 2$ und $N \in \mathbb{N}, N > 2\delta$. Aus Satz (3.3) erhält man ein $c_3 > 0$ mit

$$A_{kN}(\Omega) - A_{(k-1)N}(\Omega)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\pi}{vol(\Omega)}[(kN-\delta)^2 - ((k-1)N+\delta)^2] \\
&= \frac{\pi}{vol(\Omega)}(k^2N^2 - 2kN\delta + \delta^2 - k^2N^2 + 2kN^2 - N^2 - 2kn\delta + aN\delta + \delta)^2) \\
&= \frac{\pi}{vol(\Omega)}(-4kN\delta + 2kN^2 - N^2 + 2N\delta) \\
&= \frac{\pi}{vol(\Omega)}(N-\delta)(2Nk - N) \\
&\geq \frac{\pi}{vol(\Omega)}(N-\delta)Nk \geq c_3 k
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z},\ k \geq 2$. Sei $E_n := \{\omega \in \Omega;\ 0 < |w| \leq nN\}$. Dann gilt

$$\sum_{\omega \in E_n} |\omega|^{-\alpha} \geq \sum_{k=2}^{n} (A_{kN}(\Omega) - A_{(k-1)N}(\Omega))(kN)^{-\alpha} \geq c_3 N^{-\alpha} \sum_{k=2}^{n} k^{1-\alpha}.$$

Weil die Reihe $\sum_{k>1} k^{1-\alpha}$ für $\alpha \leq 2$ nach Analysis II divergiert, divergiert auch $\sum_{0 \neq \omega \in \Omega} |\omega|^{-\alpha} > \sum_{\omega \in E_n} |\omega|^{-\alpha} \geq c_3 N^{-\alpha} \sum_{k=2}^{n} k^{1-\alpha}$ für $\alpha \leq 2$.

2. Möglichkeit des Beweises:
(i) Zeige: O.B.d.A. kann $\Omega = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ betrachtet werden.
Zeige dazu:

$$\forall\, m, n \in \mathbb{Z},\ \exists\, 0 < c_1 < c_2 \ \in \mathbb{R} \text{ mit } \ c_1|mi + n| \leq |m\omega_1 + n\omega_2| \leq c_2|mi + n|.$$

Dazu: Es gilt

$$|m\omega_1 + n\omega_2| = |m\frac{\omega_1}{\omega_2} + n| \cdot |\omega_2|.$$

Wir definieren $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Dann gilt $\tau \neq 0$ und $\mathrm{Im}\tau \neq 0$, da $\omega_1,\ \omega_2$ linear unabhängig sind.
Betrachte

$$\frac{|m\tau + n|}{|mi + n|} = \frac{|m\tau + n|}{\sqrt{m^2 + n^2}} = |\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\tau + \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}|.$$

Dann gilt

$$(*) \qquad (\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}, \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}) \in K := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2;\ \alpha^2 + \beta^2 = 1\}.$$

Weiterhin betrachten wir die Funktion

$$K \to \mathbb{R},\ (\alpha, \beta) \mapsto |\alpha\tau + \beta|.$$

Die Funktion ist stetig auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, nimmt also Minimum und Maximum an. Somit existiert $\widetilde{c},\ \widetilde{C}$ mit

$$\widetilde{c} \leq |\alpha\tau + \beta| \leq \widetilde{C} \quad \forall\, (\alpha, \beta) \in K.$$

Wegen (*) ergibt sich

$$\widetilde{c} \leq \frac{|m\tau + n|}{|mi + n|} \leq \widetilde{C}.$$

Also existieren $0 < c_1 < c_2$, mit $c_1|mi + n| \leq |m\omega_1 + n\omega_2| \leq c_2|mi + n|$.
Damit gilt

$$c_1 \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} |\omega|^{-k} \leq \sum_{0 \neq \omega \in \Omega_1} |\omega|^{-k} \leq c_2 \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} |\omega|^{-k},$$

d. h.

$$\sum_{0 \neq \omega \in \Omega_1} |\omega|^{-k} < \infty \Longleftrightarrow \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} |\omega|^{-k} < \infty.$$

ii) Zeige: Sei $\alpha > 1$. Dann existieren $0 < c' < c$ mit

$$c'|m|^{1-\alpha} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m^2 + n^2)^{-\alpha/2} \leq c|m|^{1-\alpha} \ \ \forall\, m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

Dazu: Es gilt einerseits

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{m^2 + n^2}\right)^{\alpha/2} \quad &= \quad \sum_{|n| < |m|} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}} + \sum_{|n| \geq |m|} (m^2 + n^2)^{-\alpha/2} \\
&\overset{\frac{1}{m^2} \geq \frac{1}{m^2 + n^2}}{\leq} \quad \sum_{|n| < |m|} \frac{1}{|m|^\alpha} + \sum_{|n| \geq |m|} (m^2 + n^2)^{-\alpha/2} \\
&\leq \quad 2|m||m|^{-\alpha} + |m|^{-\alpha} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{r|m| \leq |n| \leq (r+1)|m|} \left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)^{-\alpha/2} \\
&\overset{\frac{1}{r^2+1} \geq \frac{1}{1 + \frac{n^2}{m^2}}}{\leq} \quad 2|m||m|^{-\alpha} + |m|^{-\alpha} \sum_{r=1}^{\infty} 2|m|(1 + r^2)^{-\alpha/2} \\
&\overset{\frac{1}{r^2} \geq \frac{1}{r^2+1}}{\leq} \quad 2|m|^{1-\alpha} + 2|m|^{1-\alpha} \sum_{r=1}^{\infty} r^{-\alpha} \\
&\overset{\sum_{r=1}^{\infty} r^{-\alpha} < \infty}{\leq} \quad c|m|^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{m^2+n^2}\right)^{\alpha/2} &\geq \sum_{|n|<|m|}\left(\frac{1}{2m^2}\right)^{\alpha/2}\\
&\geq \sum_{n=0}^{|m|-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha/2}|m|^{-\alpha}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha/2}|m|^{-\alpha}|m|\\
&\geq c'|m|^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Aus ii) folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{0\neq\omega\in\Omega}|\omega|^{-\alpha} &= \sum_{(0,0)^t\neq(m,n)^t\in\mathbb{Z}^2}(m^2+n^2)^{-\alpha/2}\\
&= \sum_{0\neq m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{m^2+n^2}\right)^{\alpha/2}+\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n^2)^{\alpha/2}}\\
&\leq \sum_{0\neq m\in\mathbb{Z}}c|m|^{1-\alpha}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^{-\alpha}\\
&< C<\infty, \qquad \text{wenn } \alpha>2.
\end{aligned}$$

Sowie

$$\begin{aligned}
\sum_{0\neq\omega\in\Omega}|\omega|^{-\alpha} &= \sum_{0\neq m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{m^2+n^2}\right)^{\alpha/2}+\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n^2)^{\alpha/2}}\\
&\geq \sum_{0\neq m\in\mathbb{Z}}c'|m|^{1-\alpha}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^{-\alpha}\\
&= \infty, \qquad \text{wenn } \alpha\leq 2.
\end{aligned}$$

Damit erhält man, dass die Reihe $\sum_{0\neq\omega\in\Omega}|\omega|^{-\alpha}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha>2$. □

(3.5) Beispiel

Sei $\Omega=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Dann gilt für $\alpha>2$,

$$\sum_{0\neq\omega\in\Omega}\omega^{-\alpha}=\sum_{0\neq g\in\mathbb{Z}^2}(g^tSg)^{-\frac{\alpha}{2}},\ S=\begin{pmatrix}|\omega_1|^2 & Re(\omega_1\overline{\omega_2})\\ Re(\omega_1\overline{\omega_2}) & |\omega_2|^2\end{pmatrix}.$$

Denn sei $g=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$, so ist $g^t=(a,b)$. Dann gilt

$$g^tSg=(a,b)\begin{pmatrix}|\omega_1|^2 & Re(\omega_1\overline{\omega_2})\\ Re(\omega_1\overline{\omega_2}) & |\omega_2|^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (a|\omega_1|^2 + bRe(\omega_1\overline{\omega_2}), aRe(\omega_1\overline{\omega_2}) + b|\omega_2|^2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= a^2|\omega_1|^2 + abRe(\omega_1\overline{\omega_2}) + abRe(\omega_1\overline{\omega_2}) + b^2|\omega_2|^2 \\
&= a^2|\omega_1|^2 + 2\langle a\omega_1, b\omega_2\rangle + b^2|\omega_2|^2 \\
&= |a\omega_1 + b\omega_2|^2
\end{aligned}$$

Da für $\Omega\backslash\{0\} = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ die Abbildung

$$\varphi : \ \Omega\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{Z}^2\backslash\{0\}, \ a\omega_1 + b\omega_2 \longmapsto (a, b),$$

eine Bijektion ist, und $\sum_{0\neq\omega\in\Omega} \omega^{-\alpha} < \infty$ für $\alpha > 2$, darf man also umordnen. Damit gilt die Aussage. ◇

Im folgenden Teil betrachten wir nun die sogenannte EISENSTEIN-*Reihen* über einem Gitter Ω.

(3.6) Definition (EISENSTEIN-Reihen)
Wir definieren für $k \geq 3$ durch

$$G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \omega^{-k}$$

die sogenannte EISENSTEIN-*Reihen*. ◇

Aus dem Konvergenz-Lemma (3.4), erhält man sofort das

(3.7) Korollar
Die EISENSTEIN-*Reihen*

$$G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \omega^{-k} \, f\ddot{u}r \ \ k \geq 3$$

sind absolut konvergent. ◇

Für ungerade $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, können wir den Wert der EISENSTEIN-*Reihen* bestimmen.

(3.8) Proposition
Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, ungerade. Dann gilt

$$G_k(\Omega) = 0.$$

Beweis
Weil mit ω auch $-\omega$ zu Ω gehört, gilt mit Satz (2.2)

$$G_k = \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \omega^{-k} = \sum_{0\neq\omega\in\Omega} (-\omega)^{-k} = \sum_{0\neq\omega\in\Omega} (-1)^{-k}\omega^{-k} = (-1)^{-k}G_k.$$

Für k ungerade ist $(-1)^{-k} = -1$, also $G_k = -G_k$, was $G_k = 0$ bedeutet. □

(3.9) Bemerkung
Zunächst kann man nicht ausschließen, dass *alle* G_k gleich Null sind. Wir werden nachher sehen, dass $G_k,\ k \geq 4$ gerade, i.a. von Null verschieden sind. ◇

(3.10) Beispiele (Gitter bei denen G_k für gerade k gleich Null ist)
1) Sei $k \in \mathbb{Z},\ k > 2$. Es gilt $G_k = 0$, falls $\Omega = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ und $k \not\equiv 0(mod 4)$.
1. Fall: Sei k ungerade, dann ist $G_k = 0$ nach Proposition (3.8).
2. Fall: $k \equiv 2(\text{mod}4)$

Wir definieren

$$\Omega_1 := \{m_1 i + m_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z},\ (m_2 > 0 \text{ und } m_1 \geq 0)\ \textit{oder}\ (m_2 < 0 \text{ und } m_1 \leq 0)\}.$$

Dann ist
$$\Omega_1 \cap i\Omega_1 = \emptyset \text{ und } \Omega_1 \dot\cup i\Omega_1 = \Omega \setminus \{0\},$$
denn: Sei $\omega = m_1 i + m_2 \in \Omega_1$, dann ist

$$i\omega = m_2 i - m_1 \in \Omega \setminus \Omega_1,$$

da $(-m_1 \leq 0$ und $m_2 > 0)$ oder $(-m_1 \leq 0$ und $m_2 < 0)$.
Also

$$G_k(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega_1\cup i\Omega_1} \omega^{-k} = \sum_{\omega\in\Omega_1} (\omega^{-k} + (i\omega)^{-k}) = \sum_{\omega\in\Omega_1} (\omega^{-k} - \omega^{-k}) = 0.$$

2) Sei $k \in \mathbb{Z},\ k > 2$. Es gilt $G_k = 0$, falls $\Omega = \mathbb{Z}\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) + \mathbb{Z}$ und $k \neq 0(mod 6)$.
1. Fall: Sei k ungerade, dann ist $G_k = 0$.
2. Fall: $k \equiv 2(mod 6)$ oder $k \equiv 4(mod 6)$, $n \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$.

Da mit $\omega = m(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})) + n,\ 0 < m \in \mathbb{Z},\ 0 \leq n \in \mathbb{Z}$ auch

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \\ &= (m(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})) + n)(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})) \\ &= -\frac{m}{2} + \frac{im\sqrt{3}}{2} + \frac{n}{2} + \frac{in\sqrt{3}}{2} \\ &= (m+n)(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})) - m, \end{aligned}$$

$$\omega_2 = \omega(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = n(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})) - m - n,$$

$$\omega_3 = \omega(\cos\pi + i\sin\pi) = -\omega,$$

$$\omega_4 = \omega(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = -n(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})) + m + n$$

und

$$\omega_5 = \omega(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})) = -(m+n)(\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) + m$$

zu Ω gehören, und

$$0 < arg\omega \leq \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3} < arg\omega_1 \leq \frac{2\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3} < arg\omega_2 \leq \pi,$$

$$-\pi < arg\omega_3 \leq -\frac{2\pi}{3},\ -\frac{2\pi}{3} < arg\omega_4 \leq -\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3} < arg\omega_1 \leq 0$$

gilt, ergibt sich also

$$G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{0\neq\omega\in\Omega,\ 0\leq arg\omega<\frac{\pi}{3}} \omega^{-k}+(-\omega)^{-k}\\
&+ (\omega(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}))^{-k}+(\omega(\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}))^{-k}\\
&+ (\omega(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}))^{-k}+(\omega(\cos-\frac{2\pi}{3}+i\sin-\frac{2\pi}{3}))^{-k}\\
&= \sum_{0\neq\omega\in\Omega,\ 0\leq arg\omega<\frac{\pi}{3}} \omega^{-k}[1+(-1)^{-k}+(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^{-k}\\
&+ (\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3})^{-k}+(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})^{-k}\\
&+ (\cos-\frac{2\pi}{3}+i\sin-\frac{2\pi}{3})^{-k}]
\end{aligned}$$

Wenn $k=6n+2$, $n\in\mathbb{Z}$, gilt $(-1)^{-k}=1$,

$$(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^{-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos\frac{-(6n+2)\pi}{3}+i\sin\frac{-(6n+2)\pi}{3}\\
&= \cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3}\\
&= -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3})^{-k} &= \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\\
(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})^{-k} &= \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\\
(\cos-\frac{2\pi}{3}+i\sin-\frac{2\pi}{3})^{-k} &= -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Also

$$G_k = G_k(\Omega)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{0\neq\omega\in\Omega,\ 0<arg\omega\leq\frac{\pi}{3}} \omega^{-k}(1+1-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})+\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\\
&\qquad +\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}))\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Wenn $k = 6n + 4$, $n \in \mathbb{Z}$, $(-1)^{-k} = 1$,

$$\begin{aligned}&(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{-k}\\ =\ & \cos\frac{-(6n+4)\pi}{3} + i\sin\frac{-(6n+4)\pi}{3}\\ =\ & \cos\frac{-4\pi}{3} + i\sin\frac{-4\pi}{3}\\ =\ & \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\end{aligned}$$

$$(\cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3})^{-k} = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}),$$

$$(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3})^{-k} = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}),$$

$$(\cos -\frac{2\pi}{3} + i\sin -\frac{2\pi}{3})^{-k} = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}).$$

Also

$$\begin{aligned}&G_k = G_k(\Omega)\\ =\ & \sum_{0\neq\omega\in\Omega,\ 0<arg\omega\leq\frac{\pi}{3}} \omega^{-k}(1+1+\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\\ & -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}))\\ =\ & 0.\end{aligned}$$

(3.11) Bemerkung

Es gehört zu den faszinierenden Ergebnissen der noch zu entwickelnden Theorie der elliptischen Funktionen, dass diese EISENSTEIN-*Reihen* Polynome über $\mathbb{Q}$ in G_4 und G_6 sind. Zum Beispiel gilt $7G_8 = 3G_4$ und $11G_{10} = 5G_4G_6$. Dies steht in Analogie zu bekannten Ergebnissen über die RIEMANN*sche Zetafunktion*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, s > 1.$$

betrachtet man nämlich statt eines Gitters Ω eine Untergruppe vom Rang 1 , also z.B. $\Omega = \mathbb{Z}$, dann erhält man an Stelle von (2) die Gitterinvarianten $F_k := 2\zeta(k)$, $k > 2$ gerade, die nach L. Euler bekanntlich rationale Vielfache von π^k sind, sich als Monome in F_2 schreiben lassen:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},\ \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

Also $5F_4 = F_2^2, 35F_6 = 2F_2^3$. ◇

§4 Erste Eigenschaften elliptischer Funktionen.

In diesem Paragraphen definieren wir die elliptischen Funktionen. Weiterhin zeigen wir Eigenschaften der elliptischen Funktionen.
Voraussetzung des Paragraphen: Sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ stets ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit Basis (ω_1, ω_2).

(4.1) Definition (elliptische Funktion)
Sei $f \in \mathcal{M}$. f heißt *elliptisch* oder *doppelt-periodisch* bezüglich Ω, wenn $\Omega \subset \mathrm{Per} f$, d.h.:
(1) $D_f + \omega = D_f$ für alle $\omega \in \Omega$,

(2) $f(z+\omega) = f(z)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $z \in \mathbb{C} \backslash D_f$.

Es bezeichne $\mathcal{K}(\Omega)$ die Menge der bezüglich Ω elliptischen Funktion. ◇

(4.2) Bemerkung
Interpretiert man hier (2) derart, dass die Gleichung für alle z und ω gelten möge, für welche beide Seiten sinnvoll sind, so ist (1) eine Folge von (2). Die Bedingungen (1) und (2) sind sicher erfüllt, wenn sie für eine Basis von Ω richtig sind.

Beweis
Sei (ω_1, ω_2) Basis von Ω, mit
(1) $D_f + \omega_1 = D_f, \quad D_f + \omega_2 = D_f,$
(2) $f(z+\omega_1) = f(z), \quad f(z+\omega_2) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \backslash D_f$.
Dann gilt

$$D_f + (\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2) = (D_f + \mathbb{Z}\omega_1) + \mathbb{Z}\omega_2 = D_f + \mathbb{Z}\omega_1 = D_f,$$

und

$$f(z + \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2) = f((z + \mathbb{Z}\omega_1) + \mathbb{Z}\omega_2) = f(z + \mathbb{Z}\omega_1) = f(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \backslash D_f$$

Das heißt, Die Bedingungen (1) und (2) sind sicher erfüllt, wenn sie für eine Basis von Ω richtig sind, da jedes $\omega \in \Omega$ die Darstellung $\omega = m\omega_1 + n\omega_2,\ m, n \in \mathbb{Z}$, hat. □

Man sagt daher auch, eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion heißt *doppelt-periodisch* oder *elliptisch*, wenn sie zwei reell linear unabhängige Perioden hat. ◇

(4.3) Bemerkung
Für $0 \neq f \in \mathcal{M}$ und $c \in \mathbb{C}$ hat man nach Analysis IV eine Laurent-*Entwicklung* der Form

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z-c)^n,\ a_m \neq 0,$$

die in einer punktierten Umgebung von c lokal-gleichmäßig konvergiert. Hier sind die *Ordnung von f in c* durch $ord_c f := m$ und das *Residuum von f in c* durch $res_c f := a_{-1}$ erklärt.
Für $f \in \mathcal{K}(\Omega), \omega \in \Omega$ und z aus einer geeigneten Umgebung von $c + \omega$ hat man

$$f(z) = f(z - \omega) = \sum_{n \geq m} a_n (z - [c + \omega])^n,$$

und es folgt daher

(3) $\qquad ord_{c+\omega} f = ord_c f \quad$ sowie $\quad res_{c+\omega} f = res_c f$

Damit ist speziell mit c auch $c + \omega,\ \omega \in \Omega$, ein Pol (bzw. eine Nullstelle oder eine $w-$Stelle) von $f \in \mathcal{K}(\Omega)$.
Seien $U \in \mathbb{C}$ offen, und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. [1] $\diamond$

Da sich die Pole in kompakten Mengen nicht häufen können, hat man zusammengefaßt die

(4.4) Proposition
Die elliptischen Funktionen $\mathcal{K}(\Omega)$ bezüglich Ω bilden einen Unterkörper des Körpers $\mathcal{M}$ aller meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$, der die konstanten Funktionen enthält. Jedes $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ hat in jedem Periodenparallelogramm nur endlich viele Pole . $\diamond$

Beweis
(1) Zeige: $\mathcal{K}(\Omega)$ ist Unterkörper.
Zeige dazu: Mit $f, g \in \mathcal{K}(\Omega)$ liegen auch $f + g,\ f \cdot g,\ \frac{1}{f}\ (f \not\equiv 0),\ -f$ in $\mathcal{K}(\Omega)$.
Seien $\omega \in \Omega$, $f, g \in \mathcal{K}(\Omega)$.
Zeige zunächst:
(1) $D_{f+g} + \omega = D_{f+g}\ \forall\, \omega \in \Omega$,
(2) $(f + g)(z + \omega) = (f + g)(z)\ \forall\, z \in \mathbb{C} \backslash D_{f+g},\ \omega \in \Omega$.
Dazu:
zu (1):
Sei $c \in D_{f+g} \subset D_f \cup D_g$. Da $D_f \cup D_g$ diskret, gibt es eine punktierte Umgebung von c, in der f und g wohldefiniert. Da $c \in D_{f+g}$, gilt

$$\lim_{z \to c} |f(z) + g(z)| = \lim_{z \to c} |(f + g)(z)| = \infty.$$

[1] Man sagt dass f in z_0 eine *w − Stelle der Ordnung* $n \in \mathbb{N}$ hat, wenn $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) - w$ in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n hat.

Mit $f, g \in \mathcal{K}(\Omega)$ erhält man

$$\begin{aligned}\infty &= \lim_{z\to c} |f(z)+g(z)| \\ &= \lim_{z\to c} |f(z+\omega)+g(z+\omega)| \\ &= \lim_{z\to c+\omega} |f(z)+g(z)| \\ &= \lim_{z\to c+\omega} |(f+g)(z)|.\end{aligned}$$

d.h. $c+\omega \in D_{f+g}$, daraus folgt $D_{f+g}+\omega = D_{f+g}$.
zu (2):
(i) Sei $z \in \mathbb{C}\backslash(D_f \cup D_g)$. In diesem Fall gilt

$$(f+g)(z+\omega) = f(z+\omega)+g(z+\omega) = f(z)+g(z) \;\forall\, \omega \in \Omega.$$

(ii) Sei $c \in D_f \cup D_g \backslash D_{f+g}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(f+g)(c) &\overset{f+g \text{ holomorph in } c}{=} \lim_{z\to c}(f+g)(z) \\ &\overset{\text{Pole diskret, also } f \text{ und } g \text{ wohldef. } in\ U\backslash\{c\}}{=} \lim_{z\to c}(f(z)+g(z)) \\ &\overset{f,g\in\mathcal{K}(\Omega)}{=} \lim_{z\to c}(f(z+\omega)+g(z+\omega)) \\ &= \lim_{z\to c}(f+g)(z+\omega) \\ &= (f+g)(c+\omega) \;\forall\, \omega \in \Omega.\end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt dann $f+g \in \mathcal{K}(\Omega)$.
Um $f \cdot g$, $\frac{1}{f}$ $(f \not\equiv 0)$, $-f$ in $\mathcal{K}(\Omega)$ zu beweisen, verfahre man analog. Bei $\frac{1}{f}$ betracht man, dass nach den Identitätssatz die Nullstellenmenge von f diskret ist und
$D_{\frac{1}{f}} = \{z \in \mathbb{C} | f(z) = 0\}$.
Es ist klar, dass konstante Funktionen in $\mathcal{K}(\Omega)$ enthalten. Zwar
$f \equiv 0$ ist Nullelement bezüglich Addition,
$f \equiv 1$ ist Einselement bezüglich Multiplikation.
Also $\mathcal{K}(\Omega)$ ist ein Unterkörper von $\mathcal{M}$.
(2) Z.Zg: Jedes $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ hat in jedem Periodenparallelogramm nur endliche viele Pole.
Dazu:
Sei $f \in \mathcal{K}(\Omega)$.
Annahme: $\sharp D_f \cap \overline{P} = \infty$. Da $\overline{P}$ kompakt, also insbesonder beschränkt, gilt auch

$$D_f \cap \overline{P} \;(\subset \overline{P})$$

ist beschränkt. Damit hat $D_f \cap \overline{P}$ nach Identitätsatz einen Häufungspunkt. was ein Widerspruch zu D_f diskret ist. □

Ein Blick auf (1) und (2) ergibt das einfache, aber wichtige

(4.5) Lemma
Mit $f(z)$ gehören auch $f'(z)$ und $g(z) := f(nz+w)$, $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, $w \in \mathbb{C}$ fest, zu $\mathcal{K}(\Omega)$. $\diamond$

Beweis
Sei $\omega \in \Omega$ beliebig.
Zu $f'(z)$:
(1) Sei $c \in D_f$, $ord_c f = -m$, $m \in \mathbb{N}$. Dann hat f die Form $f(z) = (z-c)^{-m}h(z)$, wobei h holomorph ist. Für die Ableitung gilt daher

$$f'(z) = -m(z-c)^{-m-1}h(z) + h'(z)(z-c)^{-m} = (z-c)^{-m-1}(-mh'(z) + (z-c)h(z)),$$

d.h. $D_{f'} = D_f$, also auch $D_{f'} + \omega = D_{f'}$, $\forall\, \omega \in \Omega$.
(2) Zu Zeigen: $f'(z_0+\omega) = f'(z_0)$, $\forall\, z_0 \in \mathbb{C}\backslash D_{f'}$ und $\forall\, \omega \in \Omega$.
Dazu: Sei $h \in \mathbb{C}$, $z = z_0 + h$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h+z_0)-f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h+z_0+\omega)-f(z_0+\omega)}{h+z_0+\omega-(z_0+\omega)} \\ &= \lim_{z\to z_0+\omega} \frac{f(z)-f(z_0+\omega)}{z-(z_0+\omega)} \\ &= f'(z_0+\omega). \end{aligned}$$

Zu $g(z)$:
(1) Seien $z_0 \in D_g$ und $\omega \in \Omega$ beliebig. Dann ist $nz_0 + w \in D_f$, für alle $0 \neq n \in \mathbb{N}$. Es gilt daher $nz_0 + w + n\omega = n(z_0+\omega) + w \in D_f$, also $z_0 + \omega \in D_g$. Wir erhalten $D_g + \omega = D_g$ für alle $\omega \in \Omega$.
(2) Sei $z \in \mathbb{C}\backslash D_g$ und $\omega \in \Omega$,

$$g(z+\omega) = f((nz+w)+n\omega) = f(nz+w) = g(z).$$