Perioden

Vortrag zum Seminar „Elliptische Funktionen und elliptische Kurven“, 26.10.2005

David Friedrich

Mein Seminarvortrag über Perioden meromorpher Funktionen dient als Einstieg in das Thema der elliptischen Funktionen und Kurven. Zunächst werde ich einige Grundlagen aus der Analysis IV wiederholen. Über den Stoff der Analysis-IV-Vorlesung hinaus werden wir den Begriff der Periode definieren und näher untersuchen. Als unumstrittener Höhepunkt des Vortrages wird das Fundamentallemma die Charakterisierung der Perioden einer meromorphen Funktion erlauben.

§ 1 Meromorphe Funktionen

Dieser Abschnitt dient zur Auffrischung des Analysis-IV-Stoffs und setzt diesen als gehört voraus. Für detailiertere Informationen kann man zum Beispiel das Analysis-IV-Skript von Prof. Krieg oder das Buch „Funktionentheorie“ von W. Fischer und I. Lieb zu Rate ziehen.

(1.1) Definition (meromorph)
Eine Funktion f heißt *meromorph* auf $\mathbb{C}$, wenn es eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge D_f von $\mathbb{C}$ gibt, so dass

(i) $f : \mathbb{C} \setminus D_f \to \mathbb{C}$ holomorph ist und

(ii) in den Punkten von D_f Pole hat.

Die Menge der auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen wird mit $\mathcal{M}$ bezeichnet. ◇

(1.2) Definition (diskret)
Eine Teilmenge D von $\mathbb{C}$ heißt *diskret*, wenn es zu jedem $c \in \mathbb{C}$ eine Umgebung U von c gibt, für die $D \cap U$ endlich ist. ◇

Weiterhin ist die Menge D genau dann diskret, wenn sie keine Häufungspunkte in $\mathbb{C}$ hat.

(1.3) Lemma (diskret $\Rightarrow$ abgeschlossen)
Ist eine Menge $D \subset \mathbb{C}$ diskret, so ist sie auch abgeschlossen. ◇

Beweis
Sei $D \in \mathbb{C}$ eine diskrete Menge. Wenn man um jeden beliebigen Punkt aus $\mathbb{C} \setminus D$ eine Umgebung in $\mathbb{C} \setminus D$ legen kann, so ist $\mathbb{C} \setminus D$ offen und somit D abgeschlossen.

Sei also $c_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ beliebig. Da D diskret ist, existiert eine Umgebung U_0 von c_0 mit $|D \cap U_0| < \infty$. Ist $D \cap U_0 = \emptyset$, so ist U_0 bereits eine Umgebung von c_0 in $\mathbb{C} \setminus D$. Ansonsten existiert ein $\alpha := \inf\{\|c_0 - d\|_2; d \in D \cap U_0\} > 0$, denn die Menge $D \cap U_0$ ist endlich, und c_0 liegt nicht in $D \cap U_0$. Nun gilt $\mathcal{K}_{\frac{\alpha}{2}}(c_0) \subset \mathbb{C} \setminus D$, da α der kleinste Abstand zu einem Element aus D ist. Folglich kann man um einen beliebigen Punkt aus $\mathbb{C} \setminus D$ eine Umgebung in $\mathbb{C} \setminus D$ konstruieren. □

(1.4) Lemma (Äquivalenz für Nullstellen)
Eine meromorphe Funktion f hat in z_0 genau dann eine Nullstelle der Ordnung n, wenn es ein $r > 0$, eine Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ und $g(z_0) \neq 0$. ◇

(1.5) Lemma (Äquivalenz für Polstellen)
Eine meromorphe Funktion f hat in z_0 genau dann einen Pol, wenn es ein $r > 0$, eine Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = (z - z_0)^{-n} \cdot g(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ und $g(z_0) \neq 0$. ◇

(1.6) Folgerung (Äquivalenz für meromorphe Funktionen)
Für eine meromorphe Funktion f und festes $z_0 \in \mathbb{C}$ tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:

1. f ist holomorph in z_0 mit $f(z_0) \neq 0$: Es gilt natürlich $f(z) = (z - z_0)^0 \cdot f(z)$.
2. f ist holomorph in z_0 mit $f(z_0) = 0$: Dann lässt sich f in einer Umgebung von z_0 als $f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z)$ mit $n \in \mathbb{N}$, g holomorph und $g(z_0) \neq 0$ darstellen.
3. $z_0 \in D_f$, f hat also eine Polstelle in z_0: Dann lässt sich f in einer Umgebung von z_0 als $f(z) = (z - z_0)^{-n} \cdot g(z)$ mit $n \in \mathbb{N}$, g holomorph und $g(z_0) \neq 0$ darstellen.

Insgesamt ist eine Funktion f also genau dann meromorph, wenn es für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Umgebung U, ein $k \in \mathbb{Z}$ und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$ und $g(z_0) \neq 0$. ◇

(1.7) Beispiele (meromorpher & nicht-meromorpher Funktionen)

- Jede ganze Funktion f ist meromorph auf $\mathbb{C}$ mit $D_f := \emptyset$.
- $f(z) := \frac{1}{\sin z}$ ist meromorph mit $D_f := \pi \cdot \mathbb{Z}$. Da die Nullstellen des Sinus genau $\pi \cdot \mathbb{Z}$ sind, ist $\frac{1}{\sin z}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus D_f$. Weiter hat $\sin z$ nur einfache Nullstellen, denn es gilt $(\sin z)' = \cos z$, Sinus und Cosinus haben keine gemeinsame Nullstelle. Für jedes $z_0 \in \pi \cdot \mathbb{Z}$ lässt sich $\sin z$ schreiben als $(z - z_0) \cdot h(z)$ mit

$h(z_0) \neq 0, h(z)$ ist holomorph in einer Umgebung von z_0, also lässt sich $\frac{1}{\sin z}$ darstellen als $\frac{1}{(z-z_0)\cdot h(z)}$. Da $z \mapsto \frac{1}{h(z)}$ holomorph in z_0 ist, liegt in z_0 eine einfache Polstelle vor.

- $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ ist nicht meromorph. Die Funktion ist in 0 nicht definiert. Die beiden Folgen $a_n := -\frac{1}{n}$ und $b_n := \frac{1}{2\pi i n}$ konvergieren beide gegen 0, allerdings gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Nach dem Satz von CASORATI-WEIERSTRASS liegt also eine wesentliche Singularität in 0 vor.
- $f(z) = \frac{1}{\exp(\frac{1}{z})-1}$ ist nicht meromorph auf $\mathbb{C}$, da die Polstellenmenge

$$D_f = \{\tfrac{1}{2\pi i k}; k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$$

den Häufungspunkt 0 besitzt und somit nicht diskret ist. ◇

(1.8) Satz (Der Körper der meromorphen Funktionen)
Die Menge $\mathcal{M}$ der auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen bildet einen Körper. ◇

Beweis
Besonders interessant ist hier die Existenz einer inversen Funktion. Assoziativität, Kommutativität und Distributivität folgen unmittelbar aus der Körper-Eigenschaft von $\mathbb{C}$. Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Multiplikation ergeben sich aus elementaren Umformungen und (1.6).

Sei $f \neq 0$ eine meromorphe Funktion und N_f die Nullstellenmenge von f. Nach dem Identitätssatz gilt:

$$f \equiv 0. \Leftrightarrow f \text{ hat eine Nullstelle der Ordnung } \infty. \Leftrightarrow f \text{ hat eine nicht-diskrete Nullstellenmenge.}$$

Daher ist N_f diskret, alle Nullstellen haben endliche Ordnung. Nun setze $D_{\frac{1}{f}} := N_f$, jetzt ist $\frac{1}{f}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus D_{\frac{1}{f}}$, in allen Punkten aus $D_{\frac{1}{f}}$ liegen Polstellen vor (wegen der endlichen Nullstellenordung von f). Folglich ist $\frac{1}{f}$ meromorph mit $f \cdot \frac{1}{f} \equiv 1$. □

(1.9) Bemerkung
Der Körper $\mathcal{M}$ ist der Quotientenkörper des Ringes aller ganzen Funktionen. Jede meromorphe Funktion f lässt sich auf $\mathbb{C} \setminus D_f$ als Quotient zweier ganzer Funktionen p und $q \neq 0$ schreiben: $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$. ◇

§ 2 Perioden meromorpher Funktionen

Nach der Definition der Periode werden wir uns durch einige Beispiele mit dem Begriff der Periode näher vertraut machen und dann die algebraische und topologische Struktur der Periodenmenge einer meromorphen Funktion untersuchen.

(2.1) Definition (Mengentranslation)
Für $\omega \in \mathbb{C}$ und $D \subset \mathbb{C}$ erklärt man $D + \omega \subset \mathbb{C}$ durch $D + \omega := \{d + \omega; d \in D\}$. ◇

(2.2) Definition (Periode)
Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Ein $\omega \in \mathbb{C}$ heißt *Periode von f*, wenn gilt:

(P.1) $D_f + \omega = D_f$.

(P.2) $f(z + \omega) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$.

Mit Per f wird die Menge aller Perioden von f bezeichnet. ◇

(2.3) Beispiele

- Es gilt stets $0 \in \operatorname{Per} f$ (triviale Periode).
- Ist f eine konstante Funktion, so ist jedes $\omega \in \mathbb{C}$ Periode von f, also $\operatorname{Per} f = \mathbb{C}$.
- Für $f(z) = a \cdot z + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Per} f = \{0\}$. Da f als lineare Funktion injektiv ist, kann $f(z + \omega) = f(z)$ nur für $\omega = 0$ gelten.
- Die Funktion $f(z) := \sin(z)$ hat die Periode 2π, denn es folgt aus dem Additionstheorem für den Sinus:

$$f(z + 2\pi) = \sin(z + 2\pi) = \sin(z) \cdot \cos(2\pi) + \cos(z) \cdot \sin(2\pi) = \sin(z) = f(z).$$

- Aus $\omega \in \operatorname{Per} f$ folgt $-\omega \in \operatorname{Per} f$: Es gilt $D_f = D_f + \omega - \omega = D_f - \omega$ und $f(z) = f(z - \omega + \omega) = f(z - \omega)$, da ω Periode von f ist, also erfüllt auch $-\omega$ die Definition der Periode. ◇

(2.4) Lemma (Untergruppeneigenschaft der Periodenmenge)
Für eine meromorphe Funktion f bildet Per f eine Untergruppe der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$. ◇

Beweis
Dafür werden die Untergruppenaxiome gezeigt:

(UG1): Per f ist nichtleer, da stets $0 \in \operatorname{Per} f$ gilt (vgl. Beispiel 2.3).

(UG2): Seien ω_1 und ω_2 aus Per f.

zu (P.1): $D_f + \omega_1 - \omega_2 = (D_f + \omega_1) - \omega_2 = D_f - \omega_2 = (D_f + \omega_2) - \omega_2 = D_f$.

zu (P.2): $f(z + \omega_1 - \omega_2) = f((z + \omega_1 - \omega_2) + \omega_2) = f(z + \omega_1) = f(z)$.

Daher ist auch $\omega_1 - \omega_2$ aus Per f. □

(2.5) Folgerung
Per f ist als Untergruppe einer abelschen Gruppe ebenfalls eine abelsche Gruppe. Mit der Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \times \text{Per } f \to \text{Per } f$, $\varphi(z, \omega) = \omega + \ldots + \omega$ (z-mal) wird Per f zu einem $\mathbb{Z}$-Modul. Insbesondere ist mit $\omega \in \text{Per } f$ auch $\mathbb{Z}\omega$ aus Per f. ◇

(2.6) Lemma (Die Periodenmenge einer nichtkonstanten Funktion ist diskret)
Für $f \in \mathcal{M}$ nicht-konstant ist Per f diskret. ◇

Beweis
Angenommen, die Menge Per f ist nicht diskret, d. h. es existiert ein $\omega \in \mathbb{C}$ so dass für alle Umgebungen U von ω die Menge Per $f \cap U$ unendlich viele Elemente besitzt. Nun wird induktiv eine Folge $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert, die gegen ω konvergiert:

ω_1: Wähle ein beliebiges $\omega_1 \neq \omega$ aus Per f aus.
$\omega_n \to \omega_{n+1}$: Ist ω_n bereits konstruiert, dann sei $\alpha := \frac{1}{2} \cdot |\omega_n - \omega|$. Nun wähle ein ω_{n+1} aus Per f mit $\omega_{n+1} \neq \omega$ und $\omega_{n+1} \in \mathcal{K}_\alpha(\omega)$. Ein solches ω_{n+1} existiert, da $\mathcal{K}_\alpha(\omega)$ eine Umgebung von ω ist und nach Voraussetzung jede Umgebung von ω unendlich viele Punkte aus Per f enthält.

Durch diese Konstruktion wird erreicht, dass die ω_n paarweise verschieden sind und dass der Grenzwert dieser Folge gegen ω strebt.

Behauptung: ω ist aus Per f.

zu (P.1): Zu zeigen ist $D_f + \omega = D_f$. Es wird zunächst $D_f + \omega \subseteq D_f$ gezeigt. Sei $d' \in D_f + w$, das heißt $d' = d + \omega$ für ein $d \in D_f$. Definiere $a_n := d + \omega_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist a_n aus $D_f + \omega_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da d ja aus D_f ist. Gleichzeitig ist a_n aus D_f, denn es gilt $D_f = D_f + \omega_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also liegt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ganz in D_f. Da D_f als diskrete Menge abgeschlosen ist, liegt der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = d + \omega = d'$ auch in D_f. Es wurde die Inklusion $D_f + \omega \subseteq D_f$ gezeigt. Die Inklusion $D_f \subseteq D_f + \omega$ kann analog gezeigt werden, also hat man $D_f + \omega = D_f$.

zu (P.2): Es gilt $f(z) = f(z + \omega_n)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$ und $n \in \mathbb{N}$. Betrachtet man nun den Grenzwertprozess, so erhält man für alle $z \in \mathbb{C}$, in denen f holomorph ist:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z + \omega_n) = f(z + \lim_{n\to\infty} \omega_n) = f(z + \omega).$$

Dies folgt aus der Periodeneigenschaft der ω_n und der Stetigkeit von f in $z+\omega_n$.

Die Menge $\{\omega\} \cup \{\omega_n; n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht-diskret, es gilt $f(z+\omega_n) = f(z) = f(z+\omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher stimmt f auf einer nicht-diskreten Menge mit der Funktion, die konstant $f(z)$ ist, überein. Aus dem Identitätssatz folgt dann, dass f konstant ist. Dies ist aber ein Widerspruch, also muss Per f diskret sein. □

§ 3 Das Fundamental-Lemma

Das Fundamental-Lemma liefert ein Werkzeug zur Charakterisierung der Periodenmenge einer meromorphen Funktion. In diesem Vortrag werde ich zwei Beweise ausführen, der erste stammt aus dem Buch „Elliptische Funktionen und Modulformen" von M. KOECHER und A. KRIEG, der zweite aus dem Buch „Funktionentheorie" von HURWITZ und COURANT.

(3.1) Lemma (Fundamental-Lemma)
Für jede nicht-konstante meromorphe Funktion tritt genau einer der drei folgenden Fälle ein:

(I) Per $f = \{0\}$.

(II) Es gibt ein bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmtes $\omega_f \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Per $f = \omega_f \mathbb{Z}$.

(III) Es gibt $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit:

  (i) Per $f = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$.

  (ii) ω_1 und ω_2 sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

  (iii) $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2}$ erfüllt $\operatorname{Im} \tau > 0$, $|\operatorname{Re} \tau| \leq \frac{1}{2}$ und $|\tau| \geq 1$. ⋄

Beweis
Sei also f eine nicht-konstante, meromorphe Funktion mit Periodenmenge Per f.

Fall 1: Per $f = \{0\}$
Dieser Fall wird von (I) abgedeckt.
Fall 2: Per $f \neq \{0\}$
In diesem Fall gibt es (mindestens) ein von Null verschiedenes Element in Per f. Von allen Elementen aus Per $f \setminus \{0\}$ wähle ein Element ω_f mit minimalem Betrag, also

$$0 < |\omega_f| \leq \inf\{|\omega|\,;\, \omega \in \operatorname{Per} f \setminus \{0\}\}.$$

Es muss $|\omega_f| > 0$ gelten, denn wegen der Diskretheit von Per f existiert eine Umgebung U_0 von 0, die nur endlich viele Punkte aus Per f enthält. Sind Per f und U_0 disjunkt, folgt $\omega_f \neq 0$ sofort, ansonsten lässt sich aus den endlich vielen Punkten ein Infimum auswählen.

Hilfsbehauptung 1: Für dieses ω_f gilt $\mathbb{Z}\omega_f = \mathbb{R}\omega_f \cap \operatorname{Per} f$.
Interpretation: Die einzigen skalaren Vielfachen von ω_f, die gleichzeitig Periode von f sind, sind die ganzzahligen Vielfachen.

Zum Beweis der Hilfsbehauptung 1 werden beide Inklusionen gezeigt:
$\subseteq$: $\mathbb{Z}\omega_f \subseteq \mathbb{R}\omega_f$ ist klar, $\mathbb{Z}\omega_f \subseteq \operatorname{Per} f$ folgt aus der Tatsache, dass Per f ein $\mathbb{Z}$-Modul ist.
$\supseteq$: Zeige dafür: $\omega \in \mathbb{R}\omega_f \cap \operatorname{Per} f \Rightarrow \omega \in \mathbb{Z}\omega_f$. Sei also $\omega \in \mathbb{R}\omega_f \cap \operatorname{Per} f$. Dann ist ω ein skalares Vielfaches von ω_f, es gibt also ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\omega = \alpha\omega_f$. Nun wähle ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $|\alpha - m| < 1$ und setze $\omega' := \omega - m\omega_f$. Da Per f eine Untergruppe der additiven Gruppe auf $\mathbb{C}$ bildet, liegt auch ω' in Per f. Nun gilt aber für den Betrag von ω':

$$|\omega'| = |\omega - m\omega_f| = |\alpha\omega_f - m\omega_f| = |\alpha - m||\omega_f| < |\omega_f|.$$

ω_f war aber minimal gewählt, also muss $\omega' = 0$ sein. Dann gilt $\omega' = 0 = \omega - m\omega_f$, dies ist äquivalent zu $\omega = m\omega_f$. Da m aus $\mathbb{Z}$ ist, folgt $\omega \in \mathbb{Z}\omega_f$.

Fall 2a: Per $f = \mathbb{Z}\omega_f$: Dieser Fall wird von (II) abgedeckt, hier bleibt nur die Eindeutigkeit zu zeigen. Gibt es ein weiteres $\omega' \in \mathbb{C}$ mit $\mathbb{Z}\omega' = \operatorname{Per} f$, so muss auch $\mathbb{Z}\omega' = \mathbb{Z}\omega_f$ gelten. Dies ist aber nur möglich für $\omega' = \pm\omega_f$.
Fall 2b: Per $f \neq \mathbb{Z}\omega_f$: Es existiert mindestens ein Element, welches nicht in $\mathbb{Z}\omega_f$ liegt. Wähle aus den Elementen Per $f \setminus \mathbb{Z}\omega_f$ ein Element ω_1 mit minimalem Betrag aus, also

$$0 < |\omega_1| \leq \inf\{|\omega|\,;\, \omega \in \operatorname{Per} f \setminus \mathbb{Z}\omega_f\}$$

und setze $\omega_2 := \omega_f$, $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Das so definierte τ erfüllt folgende Eigenschaften:

- τ ist nicht reell. Nach Konstruktion kann ω_1 kein skalares Vielfaches von ω_2 sein, da die einzigen skalaren Vielfachen die ganzzahligen Vielfachen sind (vergleiche die Hilfsbehauptung 1) und da ω_1 gerade nicht als ganzzahliges Vielfaches gewählt wurde. Insbesondere sind ω_1 und ω_2 linear unabhängig über $\mathbb{R}$.
- Ohne Einschränkung gilt $\operatorname{Im}(\tau) \geq 0$: Für jede komplexe Zahl z gilt $\operatorname{Im}(-z) = -\operatorname{Im}(z)$. Liegt also der Fall $\operatorname{Im}(\tau) \leq 0$ vor, so wählt man $-\omega_1$ anstelle von ω_1.

- $|\tau| \geq 1$: Nach Konstruktion ist $|\omega_1| \geq |\omega_2|$, also ist auch $\tau = \frac{|\omega_1|}{|\omega_2|} \geq 1$.
- $|\operatorname{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2}$: Nach Konstruktion ist $|\omega_1 \pm \omega_2| \geq |\omega_1|$, denn $\omega_1 \pm \omega_2$ liegt in Per f, nicht aber in $\mathbb{Z}\omega_f$, und ω_1 ist die betragsmäßig kleinste Zahl aus Per f, die nicht in $\mathbb{Z}\omega_f$ liegt. Äquivalenzumformungen ergeben:

$$\begin{aligned}
|\omega_1 \pm \omega_2| \geq |\omega_1| &\Leftrightarrow |\tau \pm 1| \geq |\tau| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(\operatorname{Re}\,\tau \pm 1)^2 + (\operatorname{Im}\,\tau)^2} \geq \sqrt{(\operatorname{Re}\,\tau)^2 + (\operatorname{Im}\,\tau)^2} \\
&\Leftrightarrow \pm 2 \operatorname{Re}\,\tau + 1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \mp 2 \operatorname{Re}\,\tau \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \mp \operatorname{Re}\,\tau \leq \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow |\operatorname{Re}\,\tau| \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Hilfsbehauptung 2: $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \text{Per } f$.
Interpretation: Die Periodenmenge von f bildet ein Gitter.
Wieder werden beide Inklusionen gezeigt.
$\subseteq$: Folgt aus der Modul-Eigenschaft von Per f.
$\supseteq$: Sei $\omega \in$ Per f. Da ω_1 und ω_2 linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von $\mathbb{C}$. Deshalb lässt sich ω als Linearkombination von ω_1 und ω_2 schreiben, also $\omega = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Nun wähle $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ mit $|\alpha_1 - m_1| \leq \frac{1}{2}$ und $|\alpha_2 - m_2| \leq \frac{1}{2}$ und definiere $\beta_1 = \alpha_1 - m_1$, $\beta_2 = \alpha_2 - m_2$ und $\omega' = \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2$. Kann man auch in diesem Fall zeigen, dass $\omega' = 0$ ist, so folgt auch hier die Behauptung.
Es ist

$$\begin{aligned}
\omega' &= \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2 = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 - m_1\omega_1 - m_2\omega_2 \\
&= (\alpha_1 - m_1)\omega_1 + (\alpha_2 - m_2)\omega_2 = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 \in \text{Per } f.
\end{aligned}$$

Gilt $\beta_1 = 0$, so ist $\omega' = \beta_2\omega_f$ ein skalares Vielfaches von ω_f mit kleinerem Betrag als ω_f, also muss in diesem Fall $\omega' = 0$ gelten.
Gilt $\beta_1 \neq 0$, so liegt ω' in Per $f \setminus \mathbb{Z}\omega_f$ Für den Betrag von ω' gilt dann:

$$\begin{aligned}
|\omega'|^2 &= |\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2|^2 && \text{Einsetzen}\\
&= |(\beta_1\frac{\omega_1}{\omega_2} + \beta_2)\cdot\omega_2|^2 && \omega_2 \text{ ausklamern}\\
&= |\beta_1\tau + \beta_2|^2|\omega_2|^2 && \text{Multiplikativität Betrag, } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \tau\\
&= ((\beta_1 \operatorname{Re}\tau + \beta_2)^2 + (\operatorname{Im}\tau\beta_1)^2)|\omega_2|^2 && \text{Betrag berechnen}\\
&= (\beta_1^2 \operatorname{Re}^2\tau + 2\beta_1\beta_2 \operatorname{Re}\tau + \beta_2^2 + \beta_1^2 \operatorname{Im}^2\tau)|\omega_2|^2 &&\\
&= (\beta_1^2|\tau|^2 + 2\beta_1\beta_2 \operatorname{Re}\tau + \beta_2^2)|\omega_2|^2 && \operatorname{Re}^2\tau + \operatorname{Im}^2\tau = |\tau|^2\\
&\le |(\beta_1^2|\tau|^2 + 2\beta_1\beta_2 \operatorname{Re}\tau + \beta_2^2)|\cdot|\omega_2|^2 && \text{Betrag des 1.Faktors nehmen}\\
&\le (|\beta_1|^2|\tau|^2 + 2|\beta_1||\beta_2||\operatorname{Re}\tau| + |\beta_2|^2)\cdot|\omega_2|^2 && \text{Dreiecksungleichung}\\
&\le (|\beta_1|^2|\tau|^2 + 2|\beta_1||\beta_2|\tfrac{1}{2} + |\beta_2|^2)\cdot|\omega_2|^2 && |\operatorname{Re}\tau| \le \tfrac{1}{2}\\
&\le (|\beta_1|^2|\tau|^2 + |\beta_1||\beta_2||\tau|^2 + |\beta_2|^2|\tau|^2)\cdot|\omega_2|^2 && |\tau| \le 1\\
&= (|\beta_1|^2 + |\beta_1||\beta_2| + |\beta_2|^2)\cdot|\tau|^2|\omega_2|^2 && |\tau|^2 \text{ ausklammern}\\
&\le ((\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2)|\omega_1|^2 && |\beta_1|, |\beta_2| \le \tfrac{1}{2}\\
&= \tfrac{3}{4}|\omega_1|^2.
\end{aligned}$$

Daher ist ω' ein Element aus Per $f \setminus \mathbb{Z}\omega_f$, dessen Betrag echt kleiner ist als der Betrag von ω_1. Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn ω_1 ist das betragsmäßig kleinste Element aus Per $f \setminus \mathbb{Z}\omega_f$ Folglich kann nur der Fall $\beta_1 = 0$ eintreten, es gilt dann $\omega' = 0 = \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2$ und somit $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ mit $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Dieser Fall wird also von (III) abgedeckt. □

(3.2) Bemerkung
Da immer einer der drei Fälle (I), (II) oder (III) eintritt und die drei Fälle sich gegenseitig ausschließen, tritt **genau** einer der drei Fälle ein. Betrachtet man die Voraussetzungen und untersucht, wo sie verwendet werden, so stellt man fest, dass die Periodeneigenschaft von f im Beweis nicht konkret verwendet wurde. Vielmehr geht in den Beweis ein, dass die Periodenmenge einer meromorphen Funktion eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe auf $\mathbb{C}$ bildet. ◇

Beweis (Alternativer Beweis des Fundamentallemmas)
Im Falle von Per $f = \{0\}$ und Per $f = \mathbb{Z}\omega_f$ gehen HURWITZ & COURANT identisch vor. Für den Fall, dass die Punkte nicht sämtlich auf einer Geraden liegt, liefern HURWITZ & COURANT einen geometrischen Beweis:

Sei $\omega_1 \in$ Per f ein von Null verschiedener Punkt und $\omega_2 \in$ Per f ein Punkt, der nicht auf der Geraden durch die Punkte 0 und ω_1 liegt. Die Punkte $0, \omega_1, \omega_2$ bilden zusammen das Dreieck $\triangle 0\omega_1\omega_2$. Dieses Dreieck kann nur endlich viele Punkte aus Per f enthalten, denn die Menge Per $f \cap \overline{\triangle 0\omega_1\omega_2}$ ist beschränkt und eine unendliche beschränkte Menge besäße nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS einen Häufungspunkt. Per f besitzt als diskrete Menge jedoch keine Häufungspunkte, Per $f \cap \overline{\triangle 0\omega_1\omega_2}$ also erst recht nicht.

Für den Fall, dass die Menge $\overline{\triangle 0\omega_1\omega_2}$ einen Punkt aus Per f enthält, der nicht Eckpunkt des Dreiecks ist, sei $\omega_3 \in$ Per f ein solcher Punkt. Das Dreieck $\triangle 0\omega_1\omega_3$ ist dann eine echte Teilmenge des Dreiecks $\triangle 0\omega_1\omega_2$ und enthält weniger Punkte aus Per f, da ω_2 nicht mehr in $\triangle 0\omega_1\omega_3$ liegt. Da es nur endlich viele Punkte aus Per f in $\triangle 0\omega_1\omega_2$ gibt, lässt sich ein Dreieck wählen, das keine Punkte aus Per f enthält. Im Folgenden seien ω_1 und ω_2 bereits so gewählt, dass $\triangle 0\omega_1\omega_2$ keine weiteren Punkte aus Per f enthält.

Nun betrachtet man das Parallelogramm mit den Ecken $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$. Auch dieses Parallelogramm enthält keine Punkte aus Per f: Das Parallelogramm lässt sich in die beiden Dreiecke $\triangle 0\omega_1\omega_2$ und $\triangle \omega_1\omega_2(\omega_1 + \omega_2)$ aufteilen. Für das erste Dreieck wurde dies bereits gezeigt. Würde das zweite Dreieck einen Punkt $\omega \in$ Per f enthalten, dann wäre $\omega' := \omega_1 + \omega_2 - \omega$ in $\triangle 0\omega_1\omega_2$ und außerdem in Per f (Gruppeneigenschaft). Dies ist aber durch die Wahl von ω_1 und ω_2 ausgeschlossen.

Behauptung: Jedes beliebige Periodenelement ω lässt sich ausdrücken als

$$\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \text{ mit } m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Sei $\omega \in$ Per f beliebig. Ist $\omega \in \{0, \omega_1, \omega_2\}$, so folgt die Behauptung direkt. Ansonsten ist das Parallelogramm mit den Ecken $0, a, \omega$ und b nicht-entartet, wobei die Ecken a und b skalare Vielfache von ω_1 bzw. ω_2 sind. Dann ist $\omega = a + b = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Die reellen Zahlen t_1 und t_2 lassen sich darstellen als $t_1 = m_1 + r_1$, $m_1 \in \mathbb{Z}, 0 \leq r_1 < 1$ und $t_2 = m_2 + r_2$, $m_2 \in \mathbb{Z}, 0 \leq r_2 < 1$. Es ist $\omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2 = r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \in$ Per f. Der Punkt $r_1\omega_1 + r_2\omega_2$ liegt jedoch im Inneren des Parallelogramms $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$. Daher muss $r_1 = r_2 = 0$ gelten und damit auch $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. □

(3.3) Folgerung
Mit Hilfe des Fundamentallemmas lässt sich die Periodenmenge einer meromorphen Funktion f genau beschreiben. Eine solche genaue Beschreibung werde ich am Beispiel des Tangens verdeutlichen. ◇

(3.4) Beispiel (Das Fundamentallemma in Aktion)
Mit Hilfe des Fundamentallemmas wird nun die Periodenmenge des Tangens untersucht. Sei also $f(z) := \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$ mit $D_f := \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Der Tangens hat die Periode π. Für die Polstellenmenge D_f verifiziert man

$$D_f + \pi = \tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + \pi = \tfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = D_f.$$

Ist z aus $\mathbb{C} \setminus D_f$, so gilt

$$\tan(z+\pi) = \frac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} = \frac{\sin(z)\cos(\pi) + \cos(z)\sin(\pi)}{\cos(z)\cos(\pi) + \sin(z)\sin(\pi)} = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \tan(z).$$

Da π aus Per f ist, scheidet der Fall (I) mit Per $f = \{0\}$ aus. Angenommen für $f(z)$ trifft der Fall (III) zu, dann würde es ein $\omega \in \mathbb{C}$ geben, so dass 2π und ω linear unabhängig sind und ω ebenfalls Periode von f ist. Damit die lineare Unabhängigkeit gegeben ist, muss ω aus $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sein. Da f im Nullpunkt holomorph ist, müsste dann gelten:

$$0 = \tan(0) = \tan(0+\omega) = \tan(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\cos(\omega)}\,.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn die Nullstellen des Sinus sind genau $\pi\mathbb{Z}$, insbesondere reell. Daher scheidet Fall (III) ebenfalls aus.

Außerdem kann man zeigen, dass

$$0 < |2\pi| \leq \inf\{|\omega|; \omega \in \text{Per } f \setminus \{0\}\}$$

erfüllt ist. Angenommen, es gibt ein skalares Vielfaches ω von π, welches ebenfalls Periode ist, aber betragsmäßig kleiner als ω ist. Da dann erneut $\tan(0) = \tan(\omega)$ gelten muss, der Tangens in den Intervallen $(-\pi, 0)$ oder $(0, \pi)$ aber keine Nullstellen hat, kann ein solches ω nicht existieren.

Folglich gilt Per $f = \pi\mathbb{Z}$. $\diamond$

(3.5) Definition
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der mit $1 \leq \dim V < \infty$. Eine Teilmenge Ω von V heißt *Gitter* in V, wenn es eine Basis $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ von V gibt mit $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_n$. Man nennt dann $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ auch eine *Basis* von Ω. Eine Darstellung eines $\omega \in \Omega$ in der Form $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n$ mit $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ nennt man *Linearkombination* von ω durch $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ über $\mathbb{Z}$. $\diamond$

(3.6) Bemerkung
Im Fall (III) des Fundamentallemmas ist die Periodenmenge Per f also ein Gitter im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$. $\diamond$

(3.7) Proposition
Jedes Gitter Ω in $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen und diskret in $\mathbb{C}$. $\diamond$

Beweis
Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit Basis (ω_1, ω_2). Definiert man $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2}$ und schreibt τ als $\tau = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so darf man $y > 0$ annehmen. Angenommen es gilt $y = 0$, so wären ω_1 und ω_2 linear abhängig über $\mathbb{R}$. Gilt $y < 0$, so kann man $(-\omega_1, \omega_2)$ als Basis von Ω betrachten.

Hilfsbehauptung: Für jedes $r > 0$ ist die Menge $M_r := \{\omega \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}; |\omega| < r\}$ endlich.

Sei dazu $\omega = m\tau + n$ aus M_r, also $m, n \in \mathbb{Z}$ und $|\omega| < r$. Durch elementare Umformungen findet man Schranken für $|m|$ und $|n|$. Es ist

$$r^2 > |m\tau + n|^2 = (mx + n)^2 + (my)^2 \geq m^2 y^2.$$

Dieser Ausdruck ist äquivalent zu $|m| < \frac{r}{y}$. Da r und y fest sind, kann es nur endlich viele $m \in \mathbb{Z}$ geben, so dass $\omega \in M_r$. Mit Hilfe der zweiten Dreiecksungleichung findet man eine Abschätzung für $|n|$:

$$\begin{aligned} r > |m\tau + n| = |mx + n + imy| &= \sqrt{(mx + n)^2 + (my)^2} \\ \geq \sqrt{(mx + n)^2} = |mx + n| \geq |n| - |mx|. \end{aligned}$$

Deshalb ist $|n| < r + |m||x| < r + \frac{r}{y}|x|$, wenn man die Abschätzung für $|m|$ verwendet. Insgesamt gibt es also nur endlich viele $\omega \in M_r$.

Nun zum eigentlichen Beweis. Sei dafür $c \in \mathbb{C}$ beliebig. Setze $\rho := |c| + 1$, dann ist $\mathcal{K}_\rho(0)$ eine Umgebung von c. Weiter sei $r := \frac{\rho}{|\omega_2|}$. Für den Schnitt von Ω mit $\mathcal{K}_\rho(0)$ gilt:

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_\rho(0) \cap \Omega| &= \#\{\omega \in \mathbb{C};\ \omega \in \Omega \text{ und } |\omega| < \rho\} \\ &= \#\{\omega \in \Omega;\ |\omega| < \rho\} \\ &= \#\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |m\omega_1 + n\omega_2| < \rho\} \\ &= \#\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ \tfrac{|m\omega_1 + n\omega_2|}{|\omega_2|} < r\} \\ &= \#\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |m\tau + n| < r\} \\ &= \#\{\omega \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z};\ |\omega| < r\} = |M_r|. \end{aligned}$$

Die Menge M_r ist nach der Hilfsbehauptung endlich, also ist auch $|\mathcal{K}_\rho(0) \cap \Omega|$ endlich. Da $c \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt wurde, existiert zu jedem $c \in \mathbb{C}$ eine Umgebung, deren Schnitt mit Ω eine endliche Menge ergibt, also ist Ω diskret und mit (1.3) auch abgeschlossen. $\square$

§4 Aufgabe 1, Seite 20

Zum Schluss nun noch die Lösung zu Aufgabe 1, Seite 20.

Aufgabe 1: Sei $0 \neq \omega \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von linear unabhängigen ganzen Funktionen mit Per $f_n = \mathbb{Z}\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Für die Lösung wird folgender Hilfssatz benötigt:

(4.1) Hilfssatz
Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind die ganzen Funktionen

$$z \mapsto 1, z \mapsto \sin(\tfrac{2\pi z}{\omega}), z \mapsto \sin(\tfrac{2\pi z}{\omega})^2, \ldots, z \mapsto \sin(\tfrac{2\pi z}{\omega})^n$$

linear unabhängig. ◇

Beweis
Es ist zu zeigen, dass

$$x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot \sin(\tfrac{2\pi z}{\omega}) + \ldots + x_n \cdot \sin(\tfrac{2\pi z}{\omega})^n = 0 \qquad (*)$$

nur für $x_0 = \ldots = x_n = 0$ gilt, wobei $(*)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten muss.

Angenommen, es gibt $x_0, \ldots x_n$, die $(*)$ erfüllen, so muss $(*)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten, insbesondere auch für folgende Punkte:

Definiere $m_j := \frac{j}{n}$ für $j = 0, \ldots, n$. Die m_j sind paarweise verschieden. Außerdem definiere $\tilde{m}_j := \frac{\omega}{2\pi} \cdot \arcsin(m_j)$. Durch diese Definition wird erreicht, dass

$$\sin(\tfrac{2\pi}{\omega} \cdot \tilde{m}_j) = \sin(\tfrac{2\pi}{\omega}\tfrac{\omega}{2\pi} \cdot \arcsin(m_j)) = m_j$$

für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$ gilt.

Das folgende lineare Gleichungssystem entspricht $(*)$ in den Punkten $\tilde{m}_0, \ldots, \tilde{m}_n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_0) & \cdots & \cdots & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_0)^n \\ 1 & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_1) & \cdots & \cdots & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_1)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_n) & \cdots & \cdots & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_n)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (**)$$

Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung, denn:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_0) & \cdots & \cdots & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_0)^n \\ 1 & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_1) & \cdots & \cdots & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_1)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_n) & \cdots & \cdots & \sin(\frac{2\pi}{\omega}\tilde{m}_n)^n \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & m_0 & \cdots & \cdots & m_0^n \\ 1 & m_1 & \cdots & \cdots & m_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & m_n & \cdots & \cdots & m_n^n \end{bmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (m_j - m_i) \neq 0.$$

Die Determinante ist bekannt, da es sich bei der Matrix um die VANDERMONDEsche Matrix handelt. Ihr Wert ist ungleich Null, da alle m_j paarweise verschieden sind. Daher hat $(**)$ genau eine Lösung, nämlich $x_0 = \ldots = x_n = 0$. $\square$

Die Funktion $f(z) := \sin(z)$ hat die Periode 2π, also hat $\tilde{f}(z) := \sin(\frac{2\pi z}{\omega})$ die Periode ω:

$$\tilde{f}(z+\omega) = \sin((z+\omega)\cdot\tfrac{2\pi}{\omega}) = \sin(\tfrac{2\pi z}{\omega} + \tfrac{2\pi\omega}{\omega}) = \sin(\tfrac{2\pi z}{\omega} + 2\pi) = \sin(\tfrac{2\pi z}{\omega}) = \tilde{f}(z).$$

Wählt man aus einer Menge von linear unabhängigen Vektoren eine Teilmenge aus, so enthält auch diese Teilmenge nur linear unabhängige Vektoren. Aus der Tatsache, dass die Funktion $z \mapsto z^{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{R}$ injektiv ist und mit Hilfe des Fundamentallemmas schließt man analog zu Beispiel 3.4:

Für $f_n := \sin(\frac{2\pi z}{\omega})^{2n-1}$ ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge linear unabhäniger ganzer Funktionen mit Periode $\mathbb{Z}\omega$.