Integrationsprobleme

Vortrag zum Seminar „Elliptische Funktionen und elliptische Kurven“, 19.10.2005

Claudia Nellessen

§ 1 Integrationsprobleme

In diesem Paragraphen soll zunächst das Integrationsproblem vorgestellt und dann Lösungsansätze erarbeitet werden.

— *Einleitung* —

Zum Ende des 18. und Anfang des 19. Jahrhunderts kam es zu einem Wendepunkt in der Mathematik. Bisher waren nur folgende Typen von Funktionen bekannt:

a) rationale Funktionen

b) trigonometrische und hyperbolische Funktionen, mit Exponentialfunktion und ihren Umkehrfunktionen

c) die Gamma-Funktion

Man stellte nun fest, dass ein Integral der Form

$$F(x) := \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{p(t)}} \tag{1}$$

wobei $p(t)$ ein Polynom vom Grad 3 oder 4 in t ist, das im betrachtetem Intervall nur positive Werte annimmt mit diesen nicht zu lösen ist.
Für den Fall, dass $p(t)$ vom Grad 1 ist, hat es die Form $p(t) = bt + c$ mit b und $c \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass Integral ist bereits mit Methoden aus der Schule lösbar:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{bt+c}} \\ &= \int_a^x (bt+c)^{\frac{-1}{2}} dt \\ &= \frac{2}{b}((b \cdot x + c)^{\frac{1}{2}} - (b \cdot a + c)^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Falls $p(t)$ Grad 2 hat, gilt z.B. für $p(t) = 1 - t^2$

$$F(x) := \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x) - \arcsin(t),$$

oder für $p(t) = (ct-b)^2$ mit b und $c \in \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{(ct-b)^2}} = \int_a^x \frac{dt}{ct-b} = \frac{1}{c}\ln(cx-b) - \frac{1}{c}\ln(ca-b)$$

Integrale wie in (1) werden seit diesem Zeitpunkt – fälschlicherweise – als *elliptische* Integrale beizeichnet, da sie bei der Bestimmung der Bogenlänge von Ellipsen, Hyperbeln und der Lemniskate auftreten.
Begeben wir uns nun an die

— *Problemlösung* —

Wir versuchen zunächst einen Weg zu finden, das Problem, das aus den eventuellen Nullstellen von p entsteht, zu lösen. Dazu bedienen wir uns eines Tricks:Wir nehmen an, dass F (lokal) eine streng monoton wachsende Umkehrfunktion G besitzt. Dann folgt aus (1)

$$\begin{aligned}
& G \quad \text{Umkehrfunktion von} \quad F \\
\Rightarrow\quad & G'(x) = \tfrac{1}{F'(Gx))} \\
\Rightarrow\quad & (G')^2 = (F'(G))^{-2} \\
& F'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{p(x)}} \\
\Rightarrow\quad & F'(G(x)) = \tfrac{1}{\sqrt{p(G(x))}} \\
\Rightarrow\quad & (F'(G))^{-2} = (\sqrt{p(G)})^2 = p(G)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad G'^2 = F'(G)^{-2} = p(G). \tag{2}$$

Dies führt uns zu einer Möglichkeit ein Polynom vierten Grades auf ein Polynom vom Grad kleinergleich 3 zu reduzieren. Dies geschieht mit Hilfe der

(1.1) Proposition
Sei $p(t)$ ein komplexes Polynom vom Grad 4 und $r \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(t)$ sowie

$$q(t) := p'(r) \cdot t^3 + \frac{1}{2}p''(r) \cdot t^2 + \frac{1}{6}p'''(r) \cdot t + \frac{1}{24}p^{(4)}(r) \in \mathbb{C}[t].$$

In diesem Fall sind äquivalent:

a) G ist Lösung der Differentialgleichung $G'^2 = p(G)$

b) entweder gilt $G \equiv r$ oder $H := \frac{1}{G-1}$ erfüllt die Differentialgleichung

$$H'^2 = q(H). \qquad (3) \quad \diamond$$

Beweis
Der Fall $G \equiv r$ ist trivial. Sei also $G \not\equiv r$

$$G \not\equiv r \quad \text{und} \quad H := \frac{1}{G-r} \quad \Leftrightarrow \quad H \not\equiv 0 \quad \text{und} \quad G = \frac{1}{H} + r$$

„a) $\Rightarrow$ b)“
Sei also $H \not\equiv 0$ und $G = \frac{1}{H} + r$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow H'^2 &= \left(\left(\frac{1}{G-r}\right)'\right)^2 = \left(\frac{G'}{(G-r)^2}\right)^2 = \frac{G'^2}{(G-r)^4} \overset{(2)}{=} \frac{p(G)}{\left(\frac{1}{H}\right)^4} \\
&= H^4 \cdot p\left(\frac{1}{H} + r\right) = H^4 \cdot \sum_{i=0}^{4} \frac{p^{(i)}(r)}{i!} \cdot \left(\frac{1}{H}\right)^i \overset{p(r)=0}{=} \sum_{i=1}^{4} \frac{p^{(i)}(r)}{i!} \cdot H^{4-1} \\
&= p(H)
\end{aligned}$$

„b) $\Rightarrow$ a)“
Sei $H := \frac{1}{G-r}$ Lösung von $H'^2 = q(H)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G'^2 &= \left(\left(\frac{1}{H} + r\right)'\right)^2 = \left(\frac{-H'}{H^2}\right)^2 = H^{-4} \cdot H'^2 = (G-r)^4 \cdot q\left(\frac{1}{G-r}\right) \\
&= p'(r) \cdot (G-r) + \frac{1}{2}p''(r) \cdot (G-r)^2 + \frac{1}{6}p'''(r) \cdot (G-r)^3 + \frac{1}{24}p^{(4)}(r)(G-r)^4 \\
&= \sum_{i=1}^{4} \frac{p^{(i)}(r)}{i!} \cdot (G-r)^i = \sum_{i=0}^{4} \frac{p^{(i)}(r)}{i!} \cdot (G-r)^i \\
&= p(G)
\end{aligned}$$

$\square$

Es gibt auch noch eine Möglichkeit p auf eine einfache Normalform zu reduzieren. Diese geht auf Legendre zurück. Es werden dafür folgende Annahmen getroffen:

a) $p(t)$ hat nur einfache Nullstellen

b) Es seien $a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq b \quad \text{mit} \quad p(a) = p(b) = 0$

Für $0 \neq \gamma \in \mathbb{C}$ sei

$$H := \begin{cases} \sqrt{\gamma \cdot (G-a)} & \text{falls Grad } p(t) = 3 \\ \sqrt{\gamma \cdot \frac{G-a}{G-b}} & \text{falls Grad } p(t) = 4 \end{cases}$$

Aus (2) kann man nun eine Differentialgleichung der Form

$$H'^2 = AH^4 + BH^2 + C \quad \text{mit} \quad A, B, C \in \mathbb{C}, \quad AC \neq 0$$

herleiten. Wählt man jetzt ein geeignetes $0 \neq \gamma \in \mathbb{C}$ lässt sich dies reduzieren auf

$$H'^2 = C \cdot q(H), \quad q(t) = (1-t^2) \cdot (1-k^2t^2), \quad k^2 \in \mathbb{C}, \quad k^2 \neq 0, 1 \tag{4}$$

die sogenannte *Legendre'sche Normalform*.

Das Integral, das wir schließlich erhalten, ist

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{5}$$

Um das noch zu vereinfachen ist hier die Substitution $t = \sin \psi$ sinnvoll, denn wir er halten

$$\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} \tag{6}$$

das Legendre-Integral, das wir mit uns bekannten Methoden lösen können.

§ 2 Die Lemniskate und ihre Bogenlänge

Wir beschäftigen uns nun in einem ersten Beispiel damit, wie man durch Reduktion der Funktion eine Lösung des Problems findet. Dazu betrachten wir zwei Punkte $p \neq q$ in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Die Lemniskate ist eine algebraische Kurve vierter Ordnung, d. h. eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, deren Elemente z gegeben sind durch die Gleichung

$$|z-p| \cdot |z-q| = \frac{1}{4}\,|p-q|^2 . \tag{7}$$

Hier ist schon zu erkennen, dass die Kurve durch den Mittelpunkt zwischen p und q geht. Diese Darstellung ist noch unhandlich, aber glücklicherweise kann man folgende Vereinfachungen vornehmen:
Zunächst kann man bis auf eine Verschiebung in der Ebene voraussetzen, dass der Mittelpunkt zwischen p und q im Urspung liegt. Daraus ergibt sich

$$p = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a > 0 \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{8}$$

Durch Umformen von (7) unter Voraussetzung von (8) erhält man

$$\begin{aligned}
& |z-p| \cdot |z-q| = \frac{1}{4}\,|p-q|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{4}\left|\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{(x+a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2+y^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2}^2 \\
\Leftrightarrow\quad & ((x+a)^2+y^2) \cdot ((x-a)^2+y^2) = a^4 \\
\Leftrightarrow\quad & (x^2+2ax+a^2+y^2) \cdot (x^2-2ax+a^2+y^2) = a^4 \\
\Leftrightarrow\quad & x^4 - 2a^2x^2 + 2x^2y^2 + 2a^2y^2 + y^4 + a^4 = a^4 \\
\Leftrightarrow\quad & (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)
\end{aligned}$$

Weiterhin sinnvoll ist es nun den Abstand zwischen p und q zu normieren. Am praktikabelsten erweist sich hier der Abstand $\sqrt{2}$, so dass $2a^2 = 1$ gesetzt werden kann. Es folgt:

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2 \tag{9}$$

Trotz all der bis hier vorgenommenen Vereinfachungen ist man immer noch nicht bei der gewünschten „schönen“ Funktion angelangt.
Ein geeignetes Hilfsmittel an dieser Stelle sind die Polarkoordinaten. Wir setzen

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad , \quad y = r \cdot \sin\varphi \quad \text{mit} \quad r \geq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Einsetzen in (3) und umformen ergibt

$$\begin{aligned} & (r^2cos^2\varphi + r^2sin^2\varphi)^2 = r^2cos^2\varphi - r^2sin\varphi \\ \Leftrightarrow \quad & r^4 = r^2(cos^2\varphi - sin^2\varphi) \\ \Leftrightarrow \quad & r^2 = \cos(2\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \tag{10}$$

Zum Ausrechnen der Bogenlänge greift man am besten auf eine aus der Analysis bekannte Differentialgleichung zurück. Diese wird für eine Bogenläge $s = s(t)$ gegeben in Polarkoordinaten $r = r(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$ hergeleitet mit Hilfe von Satz (1.11) aus Kapitel XI des Analysis-Skripts. Dieser sagt für $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$ und $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$

$$\begin{aligned} & s(t) = \int_0^t ||\gamma'(t)||_2 \, dt \\ & = \int_0^t \left|\left| \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right|\right|_2 dt \\ \Rightarrow \quad & s'(t) = \left|\left| \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right|\right|_2 \\ \Rightarrow \quad & s'(t) = (x')^2(t) + (y')^2(t) \\ \Rightarrow (s')^2(t) & = (r'(t)\cos\varphi(t) - r(t)\sin\varphi(t) \cdot \varphi'(t))^2 + (r'(t)\sin\varphi(t) + r(t)\cos\varphi(t) \cdot \varphi'(t))^2 \\ & = r'^2(t)\cos^2\varphi(t) + r(t)^2\sin^2\varphi(t) \cdot \varphi'^2(t) + r'^2(t)\sin^2\varphi(t) + r^2(t)\cos^2\varphi(t) \cdot \varphi'^2(t) \\ & = r'^2(t)(\cos^2\varphi(t) + \sin^2\varphi(t)) + r^2(t)\varphi'^2(t)(\cos^2\varphi(t) + \sin^2\varphi(t)) \\ & \overset{\sin^2 + \cos^2 = 1}{=} (r')^2(t) + r^2(t)(\varphi')^2(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s'^2 = x'^2 + y'^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2 \tag{11}$$

Diese Differentialgleichung führt nun zum eigentlichen Ziel des Paragraphen, dem Bestimmen der Bogenlänge der Lemniskate. Die letzte Vereinfachung, die man jetzt noch gut vornehmen kann, ist, sich auf einen Quadranten zu beschränken, sinnvollerweise auf den ersten. Das hat zur Folge, dass man r als Parameter wählen kann. Wir erhalten nun die

(2.1) Proposition
Die Bogenlänge der Lemniskate wird durch $s'^2 = \frac{r'^2}{1-r^4}$ gegeben. ◇

Beweis
Aus (4) folgt:

$$
\begin{aligned}
&& r^2 &= cos(2\varphi) \\
\Rightarrow && (r^2)' &= (cos(2\varphi))' \\
\Leftrightarrow && 2 \cdot r \cdot r' &= -2 \cdot \varphi' \cdot sin(2\varphi) \\
\Leftrightarrow && r \cdot r' &= -sin(2\varphi) \cdot \varphi' \\
\Rightarrow && r^2 \cdot r'^2 &= sin^2(2\varphi) \cdot \varphi'^2 \\
&& &= (1 - cos^2(2\varphi)) \cdot \varphi'^2 \\
&& &\overset{(4)}{=} (1 - r^4) \cdot \varphi'^2 \\
\Leftrightarrow && \varphi'^2 &= \frac{r^2 \cdot r'^2}{1 - r^4} \\
\overset{(5)}{\Rightarrow} && s'^2 &= r'^2 + r^2 \cdot \left(\frac{r^2 \cdot r'^2}{1 - r^4} \right) \\
&& &= r'^2 \cdot \left(1 + \frac{r^4}{1 - r^4} \right) \\
&& &= \frac{r'^2}{1 - r^4}
\end{aligned}
$$

□

Dies bringt nun endlich eine Formel für die Bogenlänge der Lemniskate:

$$
F(R) := \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} \tag{12}
$$

das sogenannte Fagnano-Integral. Dies können wir zu diesem Zeitpunkt noch nicht berechnen, wir können aber schon eine wichtige Eigenschaft des Lemniskatenbogen feststellen. Der

(2.2) Satz (von Fagnano)
Für alle hinreichend kleinen $x \geq 0$ gilt:

$$2F(x) = F\left(2x \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x^2}\right)$$

◇

liefert uns die Voraussetzungen für

(2.3) Satz
Die Verdopplung des Lemniskatenbogens ist durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal möglich. ◇

Beweis
2.2 zeigt, dass das Doppelte der Länge des Bogens zwischen dem Ursprung und einem Punkt P mit der Länge des Bogens zwischen dem Ursprung und einem Punkt Q übereinstimmt, wenn die Parameter $r = r_P$ und $R = r_Q$ folgende Bedingung erfüllen:

$$R = 2r \cdot \frac{\sqrt{1-r^4}}{1+r^4}$$

Den Satz liefert uns dann die *Ausführbarkeit von geometrischen Konstruktionen* aus der Algebra, da die Quadrate von R und r,

$$R^2 = 4r^2 \frac{1-r^4}{(1+r^4)^2} \quad \text{bzw} \quad r^2 = \frac{2t^2}{1+t^2} \quad \text{mit} \quad t^2 = \frac{2r^2}{1-R^4}$$

durch rationale Operationen mit dem Ziehen von Quadratwurzeln auseinander hervorgehen. □

§ 3 Die Bogenlänge der Ellipse

Um die Bogenlänge einer Ellipse ausrechnen zu können, müssen wir uns zunächst mit einer Gleichung, die Euler aufgestellt hat, beschäftigen. Er bewies nach seiner Arbeit über das Fagnano-Integral für

$$E(x) := \int_0^x \frac{1+At^2+b^4}{\sqrt{1+Ct^2+Dt^4}} dt \tag{13}$$

folgende Funktionalgleichung fest

$$E(x) + E(y) - E(z) = xyz\left(-A - \frac{x^2+y^2+z^2}{2}B + \frac{x^2y^2z^2}{6}BD\right) \tag{14}$$

mit

$$z := \frac{x\sqrt{1+Cy^2+Dy^4}+y\sqrt{1+Cx^2+Dx^4}}{1-Dx^2y^2} \tag{15}$$

Wir betrachten nun eine Ellipse, die durch

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>0, \quad b>0$$

gegeben ist. Betrachtet man nur den ersten Quadranten, so stellt man durch elementare Umformungen fest, da dort sowohl $x \geq 0$ als auch $y \geq 0$ gilt, dass

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{und somit} \quad y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{für} \quad 0 \leq x < a$$

gilt. Das Integral für die Bogenlänge hat somit folgende Form

$$\frac{1}{a}\int\limits_0^x \frac{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)s^2}}{\sqrt{a^2-s^2}}ds \overset{s=at}{=} a\int\limits_0^{\frac{x}{a}} \frac{\sqrt{1+kt^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad k := \frac{b^2-a^2}{a^2}$$

Dies lässt sich auch umformen zu

$$a\int\limits_0^{\frac{x}{a}} \frac{1+kt^2}{\sqrt{(1-t^2)(1+kt^2)}}dt$$

was die Form von (13) hat, und somit erfüllt die Bogenlänge auch die Gleichung aus (14).