Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.- Gyml. D. Dossing

6. Übung zur Mathematik für Biologen

Lösung der Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Bestimmen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe eine Dezimalbruchentwicklung für folgende Zahlen:

a) $0,88888888...$ b) $0,45454545...$
c) $0,334343434...$

Lösung: a)
$0,888... = 8 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} 8 \cdot 10^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 8 \cdot 10^{-k} - 8 = 8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \cdot 10^{-k} - 8$. Nun kann man die geometrische Reihe (Kapitel III, Beispiel 4.3) verwenden und erhält: $8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \cdot 10^{-k} - 8 = 8 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 8 = \frac{8}{9}$

Lösung: b)
$0,454545... = 45 \cdot 100^{-1} + 45 \cdot 100^{-2} + 45 \cdot 100^{-3} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} 45 \cdot 100^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 45 \cdot 100^{-k} - 45 = 45 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \cdot 100^{-k} - 45$. Nun kann man wieder die geometrische Reihe verwenden und erhält: $45 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \cdot 100^{-k} - 45 = 45 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 45 = \frac{5}{11}$

Lösung: c)
$0,3343434... = \frac{1}{10} \cdot (3,3434...) = \frac{1}{10} \cdot (3+0,3434...) = \frac{1}{10} \cdot (3+34 \cdot 100^{-1} + 34 \cdot 100^{-2} + 34 \cdot 100^{-3} + ...) = \frac{1}{10} \cdot (3 + \sum_{k=1}^{\infty} 34 \cdot 100^{-k}) = \frac{1}{10} \cdot (3 + \sum_{k=0}^{\infty} 34 \cdot 100^{-k} - 34) = \frac{1}{10} \cdot (3 + 34 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 100^{-k} - 34)$. Auch hier wendet man die geometrische Reihe an: $\frac{1}{10} \cdot (3 + 34 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 34) = \frac{1}{10} \cdot (3 + \frac{34}{99}) = \frac{331}{990}$

Aufgabe 2: Gegeben sei eine rekursiv definierte Folge (a_n) mit
$a_0 = 5, a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + 2$.

a) Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für die Folge (a_n).

Lösung:
Mit dem Satz 1.5 (Kapitel III im Skript) lässt sich folgende geschlossene Form angeben, wenn man $b = 2$, $q = \frac{3}{5}$ und $a_0 = 5$ wählt:

$$a_n = \frac{b}{1-q} + \left(a_0 - \frac{b}{1-q}\right) q^n = \frac{2}{1-\frac{3}{5}} + \left(5 - \frac{2}{1-\frac{3}{5}}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^n = 5 + 0 \left(\frac{3}{5}\right)^n = 5$$

b) Geben Sie den Grenzwert der Folge (a_n) an.

Lösung:
Die Folge ist konstant und hat immer den Wert 5, darum gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 5 = 5$$

Wenn man dies in die rekursive Form der Folge einsetzt, so erhält man als Ergebnis wieder 5. Dies ist also tatsächlich der Grenzwert. (Eine Probe ist im allgemeinen jedoch nicht nötig.)

Aufgabe 3: Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$.
a) Begründen Sie, warum diese Reihe konvergiert.

Lösung:
Wir wollen das Leibniz-Kriterium (Kapitel III, Satz 4.9) anwenden. Wir wählen $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$. a_n ist alternierend. Es gilt:

$$0 = „\frac{-1}{\infty}“ = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2^n \cdot n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} = „\frac{1}{\infty}“ = 0$$

Mit dem Einschließungskriterium (Kapitel III 2.8) erhält man also,
dass $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} = 0$. Damit ist die erste Bedingung für das Leibniz-Kriterium erfüllt. Außerdem gilt:

$$|a_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \right| = \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} =$$

$$\frac{1}{2^n \cdot 2 \cdot (n+1)n!} \leq \frac{1}{2^n \cdot (n+1)n!} \leq \frac{1}{2^n \cdot n!} = \left| \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \right| = |a_n| \quad \forall n \in I\!N$$

Damit ist auch die zweite Bedingung erfüllt, die Reihe ist also konvergent nach dem Leibniz-Kriterium.

b) Geben Sie einen Näherungswert an, so daß der Betrag des Fehlers kleiner als $\frac{1}{100}$ ist.

Lösung:
Durch ausprobieren erhält man: $|a_4| = \left| \frac{(-1)^4}{2^4 \cdot 4!} \right| = \frac{1}{16 \cdot 24!} = \frac{1}{384} \leq \frac{1}{100}$. Nun benutzen wir wieder das Leibniz-Kriterium (Kapitel III, Satz 4.9). Demnach gilt

$$\left| s - \sum_{k=0}^{N} a_k \right| \leq |a_{N+1}|$$

Wir erhalten also für $N = 3$ eine Abschätzung mit einem Fehler kleiner oder gleich $\frac{1}{100}$. Also ist die Näherung für den Grenzwert (siehe auch Beispiel 4.10)

$$s \approx \sum_{k=0}^{3} = \frac{(-1)^0}{2^0 \cdot 0!} + \frac{(-1)^1}{2^1 \cdot 1!} + \frac{(-1)^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{(-1)^3}{2^3 \cdot 3!} = \frac{1}{1 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 2} - \frac{1}{8 \cdot 6} = \frac{29}{48} \approx 0,6042$$