Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. S. Walcher
Dipl.- Gyml. D. Dossing

Lösungen zu den Testaufgaben 2

Aufgabe 1: Gegeben sei die rekursiv definierte Folge (a_n):

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = 0,2 \cdot a_n + 10$$

a) Geben Sie eine geschlossene Formel für die Folge (a_n) an.

Lösung: Mit Satz (1.5) folgt für $q = 0,2$ und $b = 10$:

$$a_n = 12,5 - 12,5 \cdot 0,2^n = 12,5 \cdot (1 - 0,2^n)$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (a_n).

Lösung: Da $\lim_{n\to\infty} 0,2^n = 0$ ist, folgt mit den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 12,5$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 7}{2n^3 - 5}$$

Lösung: Mit den Grenzwertsätzen folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 7}{2n^3 - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^3}}{2 - \frac{5}{n^3}} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 3: Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} - x \cdot e^x$.
Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

Lösung: Für die erste Ableitung gilt mit Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2+1)^2}} - e^x(x+1)$$

Für die zweite Ableitung gilt mit Produkt-, Quotienten- und Kettenregel:

$$f''(x) = \frac{6 - 2x^2}{9 \cdot \sqrt[3]{(x^2+1)^5}} - e^x(x+2)$$

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 2^x - 3x$.

a) Berechnen Sie $f(0)$ und $f(1)$.

Lösung: Es gilt:

$$f(0) = 1 \quad \text{und} \quad f(1) = -1$$

b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass f eine Nullstelle hat.

Lösung: Da die Funktion f als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig ist und $f(1) < 0 < f(0)$ gilt, folgt mit dem Zwischenwertsatz (Satz (5.3)), dass die Funktion f im Intervall $(0, 1)$ eine Nullstelle besitzt.

c) Begründen Sie, dass f mindestens zwei Nullstellen hat.

Lösung: Wählt man beispielsweise $f(4) = 4$, dann folgt mit dem Zwischenwertsatz für $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ und $f(4) > 0$, dass die Funktion f als stetige Funktion (s.o.) im Intervall $(0, 4)$ mindestens zwei Nullstellen hat.