LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 12. Januar 2005

7. Übung zur Approximationstheorie

Abgabe: Montag, 31. Januar 2005, 12 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte) (Strong Unicity Theorem)
Sei $C(X)$ der Raum aller reellen, stetigen Funktionen f, definiert auf einem kompakten (Hausdorff-) Raum X, versehen mit der Norm $\|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)|$. Ferner sei $\{g_0, g_1, ..., g_n\}$ ein Chebychev-System (vgl. Übung 4) und $M := \operatorname{span}\{g_0, ..., g_n\}$.

Für $f \in C(X)$ sei $p^* \in M$ ein beliebig aber fest gewähltes Element bester Approximation aus M zu f. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c = c(f, p^*) > 0$ gibt, so dass für alle $p \in M$ gilt:

$$\|f - p\| \geq \|f - p^*\| + c\|p^* - p\|.$$

Folgern Sie hieraus, dass es zu jedem $f \in C(X)$ genau ein Element bester Approximation gibt und obige Konstante c daher nur von $f \in C(X)$ abhängt.

Hinweis: Cheney, S. 80.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien X, $C(X)$ und M wie in Aufgabe 1. Ferner sei E der Operator, der jedem $f \in C(X)$ sein Element bester Approximation $p^* = p^*(f) \in M$ zuordnet, d. h. $E(f) := p^*(f)$ für alle $f \in C(X)$. Zeigen Sie: Zu jedem $f_0 \in C(X)$ existiert eine Konstante $c = c(f_0) > 0$, so dass

$$\|E(f_0) - E(f)\| \leq c\|f_0 - f\| \quad \text{für alle } f \in C(X),$$

d. h. E erfüllt in jedem Punkt $f_0 \in C(X)$ eine Lipschitzbedingung, ist also insbesondere stetig auf $C(X)$.

Hinweis: Cheney, S. 82.

Aufgabe 3 (8 Punkte) (Beste Approximation von $f(x) = |x|$)
Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $c > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$E_n(|\cdot|;\, C[-1,1]) \geq \frac{c}{n}.$$

Hinweis: DeVore-Lorentz, S. 275.

Aufgabe 4 (6 Punkte) (Satz von Korovkin)
Sei $(U_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von positiven linearen Operatoren von $C[-1,1]$ in $\mathcal{P}_n$. Weiter sei

$$\lambda_n := \max_{k\in\{0,1,2\}} \|U_n f_k - f_k\|_{C[-1,1]},$$

wobei $f_k(x) = x^k$ für $x \in [-1,1]$ und $k \in \{0,1,2\}$. Zeigen Sie:

$$\lambda_n \neq o(n^{-2}),$$

d. h. $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n n^2 > 0$ bzw. mindestens eine der Funktionen $f_0,\ f_1,\ f_2$ kann nicht besser als $O(n^{-2})$ durch $(U_n)_{n\geq 1}$ approximiert werden.

Hinweis: DeVore-Lorentz, S. 278.