LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 24. November 2004

4. Übung zur Approximationstheorie

Abgabe: Montag, 6. Dezember 2004, 12 Uhr

Definition: Sei $X \neq \{0\}$ ein normierter Vektorraum. Eine Menge $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ stetiger, reell- oder komplexwertiger Funktionen auf X heißt ein **Chebychev-System** (oder **Haar-System**) auf X, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

> Sind $x_1, \dots, x_n \in X$ paarweise verschieden, dann gilt
> $$D(\Phi; x_1, \dots, x_n) := \det \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Sei $X \neq \{0\}$ ein normierter Vektorraum und seien $x_1, \dots, x_n \in X$ paarweise verschieden. Ferner sei $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ eine Menge stetiger, komplexwertiger Funktionen auf X. Das **allgemeine (komplexe) Lagrange-Interpolationsproblem** lautet dann:

> Gegeben seien beliebige komplexe Zahlen $y_1, \dots, y_n$. Gesucht sind Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, so dass gilt:
> $$\sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(x_i) = y_i \qquad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für beliebige $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$ und paarweise verschiedene Elemente $x_1, \dots, x_n \in X$ ist das allgemeine (komplexe) Lagrange-Interpolationsproblem eindeutig lösbar.

(ii) Φ ist ein Chebychev-System.

(iii) Jede Funktion $P = a_1\phi_1 + \cdots + a_n\phi_n$, für die mindestens einer der Koeffizienten $a_i \neq 0$ ist, hat höchstens $n-1$ paarweise verschiedene Nullstellen in X.

Aufgabe 2 $(3+1$ Punkte$)$

a) Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen $z_0, \dots, z_n$. Zeigen Sie, dass die **Vandermonde-Determinante**
$$V_n := \det \begin{pmatrix} 1 & z_0 & \cdots & z_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^n \end{pmatrix}$$
den folgenden Wert besitzt:
$$V_n = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 und Teil a), dass das spezielle (komplexe) Lagrange-Interpolationsproblem der Vorlesung (vgl. Satz III.1) eine eindeutige Lösung hat.

Aufgabe 3 $(1+2+2+2+2$ Punkte)
Für $f \in X_{2\pi}$ und $m,n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$ sind die **de La Vallée-Poussin Mittel** (delayed means) definiert durch

$$V_{m,n} f(x) := \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=m}^{n} S_k f(x),$$

wobei $S_k f$ die k-te Fourier-Teilsumme von $f \in X_{2\pi}$ bezeichne.

a) Welche Operatoren werden über die Spezialfälle $m = 0$ bzw. $m = n$ reproduziert?

b) Zeigen Sie die Darstellung

$$V_{m,n} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) v_{m,n}(u)\, du$$

mit Kern

$$v_{m,n}(x) := \frac{n+1}{n-m+1} F_n(x) - \frac{m}{n-m+1} F_{m-1}(x),$$

wobei F_n der Fejér-Kern ist und $F_{-1}(x) := 0$ gesetzt wird.

c) Bestimmen Sie die sogenannten Konvergenzfaktoren $\rho_{k,m,n}$ in der Darstellung

$$v_{m,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} \rho_{k,m,n} e^{ikx}.$$

d) Zeigen Sie, dass für die spezielle Wahl $m = [n/2] + 1$ die $V_{m,n}$ einen Approximationsprozess auf $X_{2\pi}$ bilden ($[x]$ bezeichne die Gaussklammer von x).

e) Zeigen Sie die Projektionseigenschaft der $V_{m,n}$ auf Π_m, d. h. für alle $t_m \in \Pi_m$ gilt

$$V_{m,n}(t_m) = t_m.$$

Aufgabe 4 $(1+5+1+3$ Punkte)
Das Legendre-Polynom der Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$ sei definiert durch

$$\varphi_n(x) := (-1)^n \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n\, n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n [(1-x^2)^n] \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_n \neq 0$, d. h. $\varphi_n \in \mathcal{P}_n$.

b) Die Folge $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ bildet ein Orthonormalsystem im Raum $L^2(-1,1)$, d. h.

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\varphi_k(x)\, dx = \delta_{n,k} \qquad \text{für } n,k \in \mathbb{N}_0.$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist φ_n orthogonal auf $\mathcal{P}_{n-1}$, d. h. für alle $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ gilt

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(x) p_{n-1}(x)\, dx = 0.$$

d) Zeigen Sie, dass die φ_n bis auf das Vorzeichen die einzigen Polynome aus $\mathcal{P}_n$ sind, die b) erfüllen.

Hinweis: Verwenden Sie das Eulersche Integral erster Art (Eulersche Betafunktion)

$$B(x,y) = \int_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \text{für alle } x,y > 0.$$

Aufgabe 5 $(1+1+1+1+3+3+2$ Punkte)
Beweisen Sie Lemma VI.1 der Vorlesung:
Sei X ein normierter Vektorraum über dem Körper $\Phi \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $M \subset X$ ein Unterraum. Dann gilt:

a) $E_M[f] \leq \|f\|_X$ für alle $f \in X$.

b) $E_M[f_1 + f_2] \leq E_M[f_1] + E_M[f_2]$ für alle $f_1, f_2 \in X$.

c) $E_M[\alpha f] = |\alpha| E_M[f]$ für $f \in X$ und $\alpha \in \Phi$.

d) $E_M[f+g] = E_M[f]$ für $f \in X$ und $g \in M$.

e) $E_M[f_1 + \alpha f_2]$ ist eine stetige Funktion von $\alpha \in \Phi$ bei festen $f_1, f_2 \in X$.

f) $E_M[f_1 + \alpha f_2]$ ist eine konvexe Funktion von $\alpha \in \mathbb{R}$ bei festen $f_1, f_2 \in X$.

g) Ist $f_2 \in X$ mit $E_M[f_2] > 0$, so gilt $\lim\limits_{|\alpha| \to \infty} E_M[f_1 + \alpha f_2] = \infty$ für alle $f_1 \in X$.

Aufgabe 6 $(1+4$ Punkte)
Sei c_0 der Vektorraum aller komplexen Nullfolgen $x = (x_j)_{j \geq 1}$ versehen mit der Norm $\|x\| := \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$.
Zeigen Sie:

a) Die Menge $M := \{x \in c_0;\ \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} x_j = 0\}$ ist ein Untervektorraum von c_0.

b) Zu beliebigem $y \in c_0 \setminus M$ existiert kein Element bester Approximation aus M. (Literatur: E. W. Cheney, S. 21)