LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 26. Januar 2004

13. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Freitag, 6. Februar 2004 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Seien X, Y zwei lineare normierte Räume. Zeigen Sie: Wenn Y vollständig ist, dann ist $K[X,Y]$ (zur Definition siehe Übung 12) ein abgeschlossener linearer Unterraum von $[X,Y]$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Für ein endliches Intervall $[a,b]$ sei $K(x,t)$ stetig auf $[a,b]\times[a,b]$, und der Operator T sei definiert durch

$$T(f;x) := \int_a^b K(x,t)\,f(t)\,dt \qquad \text{für alle } f\in C[a,b] \text{ und alle } x\in[a,b].$$

Zeigen Sie, dass T ein kompakter linearer Operator von $C[a,b]$ in sich ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Arzelà–Ascoli.

Aufgabe 3 $(2+1+1+1+2$ Punkte)
Seien X, Y und Z lineare normierte Räume. Zeigen Sie:

a) Ist $T\in[X,Y]$ mit $T(X)\subset Y$ endlichdimensional, dann ist T kompakt.

b) Ist X endlichdimensional und $T: X\to Y$ linear, dann ist T kompakt.

c) Ist $S\in[X,Y]$ und $T\in K[Y,Z]$, dann ist $TS\in K[X,Z]$.

d) Ist $S\in K[X,Y]$ und $T\in[Y,Z]$, dann ist $TS\in K[X,Z]$.

e) Ist X unendlichdimensional und $T\in K[X]$ bijektiv, d. h. $T^{-1}: X\to X$ existiert, dann ist T^{-1} nicht beschränkt.

   Hinweis: Verwenden Sie Teil c) und Ü12, A4 b).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Operator T, definiert durch

$$Tf := \left(\tfrac{1}{k} f_k\right)_{k\ge 1} \qquad \text{für alle } f=(f_k)_{k\ge1}\in l^2$$

ein kompakter linearer Operator von l^2 in sich ist.
Hinweis: Verwenden Sie A1 und A3 a).

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Sei X ein Banachraum (über dem Körper Φ) und $(f_k)_{k\geq 1}$ eine Schauder–Basis von X, d. h. jedes $f \in X$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$ mit $\alpha_k \in \Phi$ (vgl. Def. I.27). Für $n \in \mathbb{N}$ sei die n–te Teilsummenprojektion $P_n : X \to X$ definiert durch

$$P_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \qquad \text{für } f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \in X.$$

Zeigen Sie, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|_{[X]} < \infty$ ist.

Bemerkung: Die Zahl $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|_{[X]}$ heißt die **Basiskonstante** der Basis $(f_k)_{k\geq 1}$.

Hinweise zur Lösung: Setzen Sie

$$Y := \left\{ (\eta_k)_{k\geq 1};\ (\eta_k)_{k\geq 1} \text{ Folge in } \Phi \text{ für die } \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k f_k \text{ in der } X\text{–Norm konvergiert} \right\}$$

und definieren Sie eine Norm $\|\cdot\|_Y$ auf Y durch

$$\|y\|_Y = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k \right\|_X \qquad \text{für alle } y = (\eta_k)_{k\geq 1} \in Y.$$

Zeigen Sie, dass $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum ist. Definieren Sie dann einen Operator T von Y auf X (es sollte offensichtlich sein, wie der auszusehen hat) und zeigen Sie, dass dieser Operator linear und beschränkt ist. Folgern Sie dann, dass T^{-1} ein beschränkter Operator von X auf Y ist, und beweisen Sie damit schließlich die Behauptung.

Literatur: Ljusternik/Sobolev [28], S. 151