LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 24. November 2003

Hinweise zur 7. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 1. Dezember 2003 vor der Übung

Aufgabe 1 $(6+6$ Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) **(Satz von Osgood)**
Seien $\langle X, \rho\rangle$ ein vollständiger metrischer Raum und $T_\alpha : X \to \mathbb{R}$ stetig für alle $\alpha \in J$ mit

$$\sup_{\alpha\in J} |T_\alpha f| < \infty \qquad \text{für alle } f \in X.$$

Dann existiert eine nichtleere, offene Kugel $S_r \subset X$ mit $r > 0$, so dass

$$\sup_{\substack{\alpha\in J\\ f\in S_r}} |T_\alpha f| < \infty.$$

Hinweis: Setzen Sie $X_{m,\alpha} := \{f \in X;\ |T_\alpha f| \le m\}$ für $\alpha \in J$ und $m \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{\alpha\in J} X_{m,\alpha}$. Folgern Sie die Behauptung analog zum Beweis des UBP mit dem Kategoriensatz von Baire.

b) **(UBP für gewisse sublineare Funktionale)**
Seien X ein Banachraum über $\mathbb{R}$ und $\{T_\alpha : X \to \mathbb{R};\ \alpha \in J\}$ eine Familie sublinearer Funktionale, die zusätzlich $T_\alpha(\beta f) = |\beta| T_\alpha f$ für alle $\alpha \in J, \beta \in \mathbb{R}$ und $f \in X$ erfüllen. Weiter sei

$$\|T_\alpha\|_{X^+} := \sup_{\substack{f\in X\\ \|f\|_X\le 1}} |T_\alpha f| < \infty.$$

Gilt $\sup_{\alpha\in J} |T_\alpha f| < \infty$ für alle $f \in X$, dann existiert ein $M > 0$ mit

$$\sup_{\alpha\in J} \|T_\alpha\|_{X^+} < M.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die T_α stetig sind und benutzen Sie dann a).

Aufgabe 2 $(5+3$ Punkte)
Seien X ein Banachraum und $X_n \subsetneqq X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossene lineare Teilräume von X. Setze

$$E_n(f) := \inf_{g\in X_n} \|f - g\|_X.$$

Zeigen Sie:

a) Die E_n sind sublinear mit

$$\|E_n\|_{X^+} := \sup_{\substack{f\in X\\ \|f\|_X\le 1}} |E_n f| = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Riesz (Ü6, A5 b).

b) Sei $(d_n)_{n\geq 1}$ eine positive Nullfolge. Dann existiert ein $f \in X$ mit

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{E_n(f)}{d_n} = \infty.$$

Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 1 b) an auf $T_n f = \frac{E_n(f)}{d_n}$.

Literatur: H. S. Shapiro: Some negative theorems of approximation theory. Michigan Math. J. **11** (1964), S. 211–217

Aufgabe 3 (Kondensationsprinzip von Banach–Steinhaus) $(7+3$ Punkte$)$
Seien X ein Banachraum, Y ein linearer normierter Raum und $(T_{p,q})_{p,q\geq 1} \subset [X,Y]$ eine Doppelfolge. Zeigen Sie:

a) Gilt

$$\limsup_{q\to\infty} \|T_{p,q}\|_{[X,Y]} = \infty \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{N}, \tag{*}$$

dann existiert eine Menge $A \subset X$ von 2. Kategorie, deren Komplement von 1. Kategorie ist, so dass für alle $f \in A$ gilt:

$$\limsup_{q\to\infty} \|T_{p,q} f\|_Y = \infty \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Wenden Sie die verschärfte Version von Satz II.4 bei festem $p \in \mathbb{N}$ auf $B_p := \{f \in X;\ \sup_{q\in\mathbb{N}} \|T_{p,q} f\|_Y < \infty\}$ an.

b) Die Voraussetzung (*) ist äquivalent dazu, dass zu jedem $p \in \mathbb{N}$ ein $f_p \in X$ existiert mit

$$\limsup_{q\to\infty} \|T_{p,q} f_p\|_Y = \infty.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Für $f \in C_{2\pi}$ sei $S_n f$ die n-te Partialsumme der Fourier-Reihe von f. Zeigen Sie mittels des Kondensationsprinzips von Banach–Steinhaus, dass ein $f \in C_{2\pi}$ und eine dichte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n f(x)| = \infty \qquad \text{für alle } x \in A.$$

Hinweis: Definieren Sie das Punktfunktional $T_{r,n} : C_{2\pi} \to \mathbb{R},\ f \mapsto (S_n f)(r)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{Q}$, zeigen Sie, dass $\|T_{r,n}\|_{C'_{2\pi}} = \|S_n\|_{[C_{2\pi}]}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r \in \mathbb{Q}$, verwenden Sie (ohne Beweis): $\limsup_{n\to\infty} \|S_n\|_{[C_{2\pi}]} = \infty$ und folgern Sie schließlich die Behauptung mit Aufgabe 3.