LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 17. November 2003

6. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 24. November 2003 vor der Übung

Aufgabe 1 $(2+2$ Punkte)

a) Sei X ein linearer normierter Raum über dem Körper $\Phi \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge in X, d. h. es existiert ein $M > 0$ mit $\|f_n\|_X \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann für jede Folge $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ in Φ mit $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ stets $\lim_{n\to\infty} \alpha_n f_n = 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Aussage aus a) nicht in allgemeinen linearen metrischen Räumen gültig ist, wobei man dort eine Folge als beschränkt bezeichnet, wenn $\delta(\{f_n;\, n \in \mathbb{N}\}) < \infty$ gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass jeder lineare normierte Raum im Sinne von Definition I.15 zu einem Banachraum vervollständigt werden kann (vgl. Bemerkung vor Lemma I.1).

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Zeigen Sie unter Verwendung von Lemma I.1, dass $\langle L^2(0,2), \tilde{\rho}_2 \rangle$ vollständig ist (vgl. Beispiel 2 nach Satz I.6).

Aufgabe 4 $(4+3$ Punkte)
Beweisen Sie die folgende Version von Satz II.1 b) der Vorlesung:
Seien X, Y lineare normierte Räume.

a) Ein linearer Operator $T : X \to Y$ ist genau dann beschränkt, wenn T beschränkte Mengen in X auf beschränkte Mengen in Y abbildet.

b) Ist $T : X \to Y$ linear und beschränkt, dann bildet T kompakte Mengen in X auf kompakte Mengen in Y ab.

Aufgabe 5 $(2+4+7$ Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Jeder endlichdimensionale Unterraum eines linearen normierten Raumes X ist abgeschlossen.

b) **(Lemma von Riesz)** Seien X ein linearer normierter Raum und $X_0 \subsetneqq X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von X. Dann existiert zu jedem $\varepsilon \in (0,1)$ ein $f_\varepsilon \in X$ mit $\|f_\varepsilon\|_X = 1$ und $\|f - f_\varepsilon\|_X \geq \varepsilon$ für alle $f \in X_0$.

c) (Lemma II.5 der Vorlesung) Ein linearer normierter Raum X ist endlichdimensional genau dann, wenn jede abgeschlossene und beschränkte Menge in X kompakt ist.