LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 10. November 2003

5. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 17. November 2003 vor der Übung

Hinweis: Sofern Sie sich noch nicht zu den Übungen zur Funktionalanalysis angemeldet haben, holen Sie das bitte nach. Anmelden können Sie sich im Internet unter

`http://www.mathA.rwth-aachen.de:8002/`

Aufgabe 1 ($7+4$ Punkte)
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

a) Zeigen Sie für reellwertige Funktionen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (i) $g \in BV[a,b]$.

   (ii) Es existieren monoton wachsende Funktionen $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t) \qquad \text{für alle } t \in [a,b].$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a): Eine Funktion $f \in BV[a,b]$ besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, und diese sind Sprungstellen, d. h. $\lim_{x\downarrow x_0} f(x)$ existiert für jedes $x_0 \in [a,b)$ und $\lim_{x\uparrow x_0} f(x)$ existiert für jedes $x_0 \in (a,b]$.

Definition: Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ beschränkt. Falls eine Zahl $I \in \mathbb{C}$ existiert, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(t_{k+1}) - g(t_k)] - I| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung $Z = \{t_k\}_{k=0}^{n} \in \mathcal{Z}[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$ und jede Zwischenpunktwahl $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1}$, (d. h. $a = t_0 \leq \xi_0 \leq t_1 \leq \xi_1 \leq \ldots \leq \xi_{n-1} \leq t_n = b$), so heißt f **(Riemann–)Stieltjes–integrierbar auf** $[a,b]$ bezüglich g.
Die Zahl I heißt dann das **(Riemann–)Stieltjes–Integral** von f bezüglich g und man schreibt

$$I = \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Aufgabe 2 ($13+4+6+4$ Punkte)
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

a) Zeigen Sie: Ist $f \in C[a,b]$ und $g \in BV[a,b]$, dann ist f Stieltjes–integrierbar bezüglich g und es gilt

$$|\int_a^b f(x)\, dg(x)| \leq [\operatorname{Var} g]_a^b \, \|f\|_C.$$

   Hinweis: Um die Existenz des Integrals zu beweisen, zeigen Sie zunächst, dass es ausreicht, reellwertige Funktionen zu betrachten und g als monoton wachsend anzunehmen.

b) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ beschränkt. Zeigen Sie: Ist f Stieltjes–integrierbar bezüglich g, dann ist auch g Stieltjes–integrierbar bezüglich f und es gilt die Regel der **partiellen Integration**:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

c) Sei $f \in C[a,b]$, $g \in C^1[a,b]$, d. h. die erste Ableitung von g existiert und ist stetig auf $[a,b]$. Hierbei wird die Ableitung in den Randpunkten jeweils einseitig gebildet. Zeigen Sie:

(i) $[\mathrm{Var}\, g]_a^b = \int_a^b |g'(t)|\,dt$

(ii) $\int_a^b f(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Beweisen Sie mit Hilfe des Permanenzsatzes von Toeplitz die folgende Aussage (die bereits aus der Analysis I bekannt sein sollte): Für eine komplexe Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ sei $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n z_k$. Konvergiert $(z_n)_{n\geq 1}$ gegen $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert auch $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ gegen z.
Bemerkung: $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ ist die Folge der (ersten) **Cesaro–Mittel** oder $(C,1)$**–Mittel** der Folge $(z_n)_{n\geq 1}$.