LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 3. November 2003

4. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 10. November 2003 vor der Übung

Hinweis: Sofern Sie sich noch nicht zu den Übungen zur Funktionalanalysis angemeldet haben, holen Sie das bitte nach. Anmelden können Sie sich im Internet unter

`http://www.mathA.rwth-aachen.de:8002/`

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Seien $\langle X,\rho_X\rangle$ ein metrischer Raum, $A\subset X$ dicht in X und $\langle Y,\rho_Y\rangle$ ein vollständiger metrischer Raum. Auf A sei eine gleichmäßig stetige Abbildung $T:A\to Y$ definiert. Zeigen Sie, dass dann auch eine gleichmäßig stetige Abbildung $\hat{T}:X\to Y$ existiert mit

$$\hat{T}f = Tf \qquad \text{für alle } f\in A.$$

Diese Abbildung $\hat{T}$ heißt eine **Fortsetzung** von T auf X. Zeigen Sie weiterhin, dass die Fortsetzung $\hat{T}$ eindeutig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $n\in\mathbb{N}$, $-\infty<a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b<\infty$ und $l_k\in C[a,b], k=0,\ldots,n$. Der **Lagrange-Interpolationsoperator** $L:C[a,b]\to C[a,b]$ sei definiert durch

$$L(f;x):=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,l_k(x).$$

Bestimmen Sie die Operatornorm von L.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Seien $n\in\mathbb{N}$ und X,Y zwei n–dimensionale LNR (über demselben Körper Φ). Zeigen Sie, dass X und Y äquivalent sind (vgl. Lemma II.4).

Definition: Sei $[a,b]\subset\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine endliche Folge von Zahlen $Z=\{t_j\}_{j=0}^{n}$ mit der Eigenschaft $a=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$ heißt eine **Zerlegung des Intervalls [a,b]**. Die **Norm der Zerlegung** Z ist definiert durch

$$\|Z\|:=\max_{0\le k\le n-1}|t_{k+1}-t_k|.$$

Die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ wird mit $\mathcal{Z}[a,b]$ bezeichnet.
Eine Funktion $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ heißt **von beschränkter Variation auf [a,b]**, falls

$$[\operatorname{Var} g]_a^b := \sup_{Z\in\mathcal{Z}[a,b]}\sum_{k=0}^{n-1}|g(t_{k+1})-g(t_k)|<\infty.$$

Die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation auf $[a,b]$ wird mit $BV[a,b]$ bezeichnet.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Sei $[a,b]\subset\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Für $f\in BV[a,b]$ sei $\|f\|_{BV}:=|f(a)|+[\operatorname{Var} f]_a^b$. Zeigen Sie, dass $\langle BV[a,b],\|\cdot\|_{BV}\rangle$ ein Banachraum ist.