LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich,
Dipl.-Math. I. Klöcker

Aachen, den 20. Oktober 2003

2. Übung zur Funktionalanalysis

Abgabe: Montag, 27. Oktober 2003 vor der Übung

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Vervollständigung eines metrischen Raums bis auf Isometrie eindeutig ist. Sind also $\langle X,\rho\rangle$ ein metrischer Raum und $\langle\tilde{X},\tilde{\rho}\rangle$ sowie $\langle\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{\rho}}\rangle$ Vervollständigungen von $\langle X,\rho\rangle$, so sind $\langle\tilde{X},\tilde{\rho}\rangle$ und $\langle\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{\rho}}\rangle$ isometrisch.

Aufgabe 2 $(16+5+5+3+3$ Punkte)
Beweisen Sie die folgende Version von Satz I.9 der Vorlesung:
Seien $\langle X,\rho\rangle$ ein metrischer Raum und $A\subset X$.

a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) A ist kompakt.

(ii) Jede unendliche Teilmenge von A besitzt mindestens einen Häufungspunkt in A. Man nennt A dann auch **Bolzano–Weierstraß–kompakt**.

(iii) Jede unendliche Folge von Elementen aus A enthält eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A. Die Menge A heißt dann auch **folgenkompakt**.

(iv) Der metrische Raum $\langle A,\rho\rangle$ ist vollständig und A ist total beschränkt. Dabei heißt A **total beschränkt**, falls zu jedem $\varepsilon>0$ eine endliche Menge $B_\varepsilon\subset A$ existiert mit

$$A\subset\bigcup_{f\in B_\varepsilon}S_\varepsilon(f).$$

(v) Jede Familie $\mathcal{F}=\{A_\alpha;\ \alpha\in I\}$ von in $\langle A,\rho\rangle$ abgeschlossenen Mengen $A_\alpha\subset A$, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, erfüllt

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\neq\emptyset.$$

Dabei besitzt $\mathcal{F}$ die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn für jede endliche Teilmenge $E\subset I$ stets $\bigcap_{\alpha\in E}A_\alpha\neq\emptyset$ gilt.

b) Ist A kompakt, dann ist A auch abgeschlossen und beschränkt.

c) Mit A ist auch jede abgeschlossene Teilmenge von A kompakt.

d) Es seien $\langle X,\rho_X\rangle$ und $\langle Y,\rho_Y\rangle$ metrische Räume, $T:X\to Y$ stetig sowie $A\subset X$ kompakt. Dann ist $T(A)$ kompakt in Y.

e) Zu jeder stetigen Abbildung T von einem metrischen Raum $\langle X,\rho_X\rangle$ nach $\langle\mathbb{R},\rho_{\text{nat}}\rangle$ und jeder kompakten Menge $A\subset X$ existieren Elemente $f,g\in A$ mit

$$T(f)=\sup_{h\in A}T(h),\qquad T(g)=\inf_{h\in A}T(h).$$