Lehrstuhl A für Mathematik

Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532

Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 05.12.2003

# 8. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 12.12.2003 vor der Übung)

**Aufgabe 1:** Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen mit Hilfe der Fourier-Analysis:

a) $y'(x) + 2y(x) = \cos 2x\,,$ $\boxed{6}$

b) $y''(x) + y'(x) + y = \sin 3x + \cos x\,.$ $\boxed{6}$

Hinweis: Bilden Sie unter der Annahme der Existenz einer Lösung $y$ die Fourier-Koeffizienten beider Seiten der Dgl; so erhalten Sie für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Gleichung für $y\hat{}(k)$. Wenden Sie nach dem Lösen dieser Gleichungen die Umkehrtransformation an und verifizieren Sie das Ergebnis.

**Aufgabe 2:** Sei $X_{2\pi}$ einer der Räume $C_{2\pi}$ oder $L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$, und $\{\chi_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$ ein positiver Kern. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \qquad (f \in X_{2\pi})\,,$

b) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho(\cos u\,;\,\cdot\,) - \cos(\,\cdot\,)\|_{X_{2\pi}} = \lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho(\sin u\,;\,\cdot\,) - \sin(\,\cdot\,)\|_{X_{2\pi}} = 0\,,$

c) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \chi_\rho\hat{}(1) = 1\,,$

d) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} I_\rho(\sin^2 \frac{u}{2}\,; 0) = 0\,,$

e) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \int\limits_{\delta\le|u|\le\pi} \chi_\rho(u)du = 0 \qquad (0 < \delta < \pi)\,.$ $\boxed{8}$

**Definition:** *Sei $H$ ein Hilbert-Raum. Eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ heißt* **Frame**, *falls Konstanten $A > 0$ und $B < \infty$ existieren mit*

$$A\,\|f\|^2 \le \sum_{k\in\mathbb{N}} |\,(f, g_k)\,|^2 \le B\,\|f\|^2 \qquad (f \in H)\,.$$

*Die zugehörige Transformation $F$ von $H$ in den Hilbert-Raum $l^2 \equiv l^2(\mathbb{N})$, definiert durch $(Ff)_k := (f, g_k)$ für $k \in \mathbb{N}$, $f \in H$, heißt* **Frame-Operator**.

**Aufgabe 3:** Sei $H$ ein Hilbert-Raum und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Frame in $H$ mit Konstanten $A \leq B$ und Frame-Operator $F$. Beweisen Sie:

a) $F$ ist linear und beschränkt, d.h. $F \in [H, l^2]$. $\boxed{1}$

b) Ist $F^*$ der zu $F$ duale Operator, dann gilt:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\,(f, g_k)\,|^2 = \|Ff\|_{l^2}^2 = (F^*Ff, f) \qquad (f \in H)\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass der duale Operator $F^* : l^2 \to H$ von $F$ linear, beschränkt und durch $(F^*c, f) := (c, Ff)_{l^2}$ für $c \in l^2$, $f \in H$ wohldefiniert ist. $\boxed{4}$

c) Die Folge $(\widetilde{g}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\widetilde{g}_k := (F^*F)^{-1}g_k$ für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Frame mit

$$B^{-1}\,\|f\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\,(f, \widetilde{g}_k)\,|^2 \leq A^{-1}\,\|f\|^2 \qquad (f \in H)\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass der inverse Operator $S^{-1} \in [H]$ von $S := F^*F$ für jedes $f \in H$ den Ungleichungen $B^{-1}\,\|f\|^2 \leq (S^{-1}f, f) \leq A^{-1}\,\|f\|^2$ genügt. $\boxed{4}$

d) Jedes $f \in H$ ist entwickelbar in seine Frame-Reihe vermöge

$$f = \sum_{k\in\mathbb{N}} (f, g_k)\ \widetilde{g}_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} (f, \widetilde{g}_k)\ g_k\,.$$

$\boxed{2}$

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie, dass zwischen den $L^p(\mathbb{R})$–Räumen keine Inklusionen bestehen, d.h., für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $p \neq q$ gilt

$$L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad L^q(\mathbb{R}) \not\subset L^p(\mathbb{R}).$$ $\boxed{6}$

**Aufgabe 5:** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x/e\,, & 0 \leq x \leq e \\ 1/\log x\,, & x > e \\ -f(-x)\,, & x < 0 \end{cases}$$

zwar zu $C_0(\mathbb{R})$ gehört, aber nicht Fourier-Transformierte einer $L^1(\mathbb{R})$-Funktion ist (vgl. Sie auch mit Übung 2, Aufgabe 3).
Hinweis: Lit. A II 1 (Goldberg), p.8 $\boxed{10}$

**Aufgabe 6:**

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der **charakteristischen Funktion** $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\kappa_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1\,, & a \leq x \leq b \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $a \leq b$. Dabei bedeutet $a \leq b$ für $a := (a_1, \ldots, a_n)$, $b := (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, dass $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. $\boxed{2}$

b) Folgern Sie, dass es Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R})$ gibt mit $f\hat{\ } \notin L^1(\mathbb{R})$. $\boxed{2}$

$\boxed{\boxed{51}}$