Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 07.11.2003

4. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 14.11.2003 vor der Übung)

Aufgabe 1: Gegeben sei das Faltungsintegral $I_\rho f := f * \chi_\rho$ mit Kern $\{\chi_\rho\}_{\rho\in\mathbb{A}}$. Beweisen Sie von Lemma 2.44 der Vorlesung:

$$\|I_\rho\|_{[L^1_{2\pi}]} = \frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho\|_{L^1_{2\pi}} \qquad (\rho \in \mathbb{A}).$$

Hinweis: Verwenden Sie den Fejér-Kern (vgl. Lit. A II 22 (Lasser), pp. 109). $\boxed{5}$

Aufgabe 2: Geben Sie eine Funktion $f \in L^1_{2\pi}$ und einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an, so dass f in x_0 die Bedingung des Riemann'schen Lokalisationsprinzips nicht erfüllt.

Hinweis: Betrachten Sie die 2π-periodische Fortsetzung von

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}\log|x| & x \in [-\pi,\pi) \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $x_0 := 0$, und benutzen Sie ohne Beweis, dass

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}\,.$$

$\boxed{8}$

Aufgabe 3: Sei $f \in Lip(\alpha; C_{2\pi})$ für $\alpha \in (0,1)$, d.h. $\omega(f,\delta;C_{2\pi}) = \mathcal{O}(\delta^\alpha)$, $\delta \to 0+$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\|S_m f - f\|_{C_{2\pi}} \leq C\log(m+1)\,\|\sigma_m f - f\|_{C_{2\pi}} \qquad (m \in \mathbb{N})\,.$$

Folgern Sie hieraus mit Hilfe von Übung 2, Aufgabe 5b), dass

$$\lim_{m\to\infty} \|S_m f - f\|_{C_{2\pi}} = 0\,,$$

d.h. die Fourier-Reihe von f konvergiert gleichmäßig gegen f. $\boxed{3}$

Hinweis: Betrachten Sie für die restlichen Aufgaben die Beweise zu Lemma 2.23, Satz 2.25 und führen Sie an geeigneten Stellen "gleichmäßige" Verallgemeinerungen durch.

Aufgabe 4: Seien $-\infty < a < b < \infty$, $f \in L^1_{2\pi}$ und $g \in L^\infty(a,b)$. Beweisen Sie, dass

$$h_\rho(x) := \int_a^b f(x-u)\, g(u)\, \sin \rho u \, du$$

für $\rho \in \mathbb{R}$ eine stetige, 2π-periodische Funktion ist und dass gilt (vgl. Lemma 2.23)

$$\lim_{\rho\to\infty} \|h_\rho\|_{C_{2\pi}} = 0\,.$$ $\boxed{7}$

Aufgabe 5:

a) Seien $f \in L^1_{2\pi}$ und $c(x) \in L^\infty[a,b]$ für ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen (vgl. Satz 2.25):

   (i) $\lim\limits_{m\to\infty} \|S_m f - c\|_{L^\infty[a,b]} = 0\,.$

   (ii) Es existiert ein $0 < \delta < \pi$, so dass

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \int_0^\delta [\, f(\cdot + u) + f(\cdot - u) - 2c(\cdot)\,]\, \frac{\sin mu}{u}\, du \right\|_{L^\infty[a,b]} = 0\,.$$ $\boxed{12}$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k}$$

auf jedem kompakten Intervall $I \subset (0, 2\pi)$ gleichmäßig konvergiert (vgl. Bemerkung 2.35 der Vorlesung). $\boxed{5}$

$\boxed{\boxed{40}}$