Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 31.10.2003

3. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 07.11.2003 vor der Übung)

Aufgabe 1: Sei X ein Banach-Raum. Zeigen Sie, dass $[X]$ eine Banach-Algebra mit Einselement ist. $\boxed{10}$

Aufgabe 2: Zeigen Sie:

a) Eine gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe ist die Fourier-Reihe ihrer Summe. $\boxed{2}$

b) Ist die Fourier-Reihe von $f \in C_{2\pi}$ gleichmäßig konvergent, so konvergiert sie gegen $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{2}$

c) Sei $f \in L^1_{2\pi}$ mit $f\hat{} \in \ell^1$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\hat{}(k)\, e^{ikx}.$$

$\boxed{2}$

d) Für $f, g \in L^1_{2\pi}$ mit $g\hat{} \in \ell^1$ gilt

i) $(f * g)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\hat{}(k)\, g\hat{}(k)\, e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R}),$

ii) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, \overline{g(u)}\, du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\hat{}(k)\, \overline{g\hat{}(k)},$

iii) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_{L^2_{2\pi}} = \|g\hat{}\|_{\ell^2}.$ $\boxed{5}$

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie: Für Funktionen $f, g \in L^2_{2\pi}$ gilt

$$(f * g)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\hat{}(k)\, g\hat{}(k)\, e^{ikx}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert. $\boxed{2}$

b) Zeigen Sie, dass für Funktionen $f, g \in L^2_{2\pi}$ das Produkt $f \cdot g \in L^1_{2\pi}$ ist und für die Fourier-Koeffizienten gilt

$$[f \cdot g]\hat{}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f\hat{}(j)\, g\hat{}(k-j) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\boxed{4}$

c) Für ein $\lambda > 0$ sei $f \in L^2(-\pi\lambda, \pi\lambda)$ eine $2\pi\lambda$-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f\hat{}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} |f(u)|^2\, du,$$

wobei hier $f\hat{}(k) := \dfrac{1}{2\pi\lambda} \displaystyle\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(u)\, e^{-iku/\lambda}\, du \quad (k \in \mathbb{Z})$. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass für den Dirichlet-Kern D_m aus Übung 1, Aufgabe 2a), gilt

$$\|D_m\|_1 = \frac{8}{\pi} \log m + \mathcal{O}(1).$$

Das **Landau-Symbol** $\mathcal{O}(1)$ (Landau: 1877–1938) bedeutet hier, dass eine Konstante $M < \infty$ existiert, so dass $\big|\, \|D_m\|_1 - \frac{8}{\pi} \log m \,\big| \le M$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Vgl. z.B. Lit. B VIII 3 (Butzer-Nessel), p.42. $\boxed{8}$

$\boxed{\boxed{37}}$