Lehrstuhl A für Mathematik

Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532

Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 30.01.2004

14. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 06.02.2004 vor der Übung)

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Parseval-Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = \pi \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 u}{u^4}\, du = \frac{2\pi}{3}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $\kappa_{[-1,1]}$ und den Cesàro-Faktor Θ^C. $\boxed{4}$

b) Sei $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ so gewählt, dass $f(x)/x \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie

$$[f(u)/u]\,\hat{}\,(v) = i \int_v^{\infty} f\,\hat{}\,(u)du\,.$$

$\boxed{4}$

Definition: *Für $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu > -1/2$, ist die ν-te* **Bessel-Funktion** J_ν *definiert durch*

$$J_\nu(t) := \frac{(t/2)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{-it\cos\Theta}(\sin\Theta)^{2\nu} d\Theta\,.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie die verschiedenen Darstellungen für $J_\nu(t)$:

a) $J_\nu(t) = \dfrac{(t/2)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{its}(1-s^2)^{(2\nu-1)/2}\, ds\,,$ $\boxed{2}$

b) $J_\nu(t) = \dfrac{(t/2)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2 \displaystyle\int_{0}^{1} \cos(ts)(1-s^2)^{(2\nu-1)/2}\, ds\,,$ $\boxed{2}$

c) $J_\nu(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(t/2)^{\nu+2j}}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)}$ $\boxed{6}$

Hinweis: Darstellung c) ergibt sich aus b) unter Zuhilfenahme der Potenzreihendarstellung des cos und der Identität

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, du\,.$$

Aufgabe 3: Für $\mu > -1/2$, $\nu > -1$ und $t > 0$ gilt

$$J_{\mu+\nu+1}(t) = \frac{t^{\nu+1}}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)} \int_0^1 J_\mu(ts) s^{\mu+1} \big(1 - s^2\big)^\nu \, ds \,.$$

Hinweis: Lit. A II 7 (Stein–Weiss), p.171 $\boxed{6}$

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine radiale Funktion mit $f(x) = F(|x|)$, $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: Für die Fourier-Transformierte von f gilt $f\hat{}(v) = F_0(|v|)$, wobei

$$F_0(r) = (2\pi)^{n/2} r^{-(n-2)/2} \int_0^\infty F(s) J_{(n-2)/2}(rs) s^{n/2} \, ds \quad (r > 0)\,.$$

Berechnen Sie ebenfalls $F_0(0)$.

Hinweis: Lemma 4.3 bzw. Übung 9, Aufgabe 1; Lit. A I β 2 (Bochner), p. 235f und A II 7 (Stein–Weiss), p. 155. $\boxed{10}$

Aufgabe 5: Für $\delta > 0$ sei die Funktion $\Phi_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi_\delta(x) := \begin{cases} (1 - |x|^2)^\delta \,, & |x| \le 1 \\ 0 \,, & |x| > 1 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)\,.$$

Zeigen Sie:

(i) Für die Fourier-Transformierte gilt

$$\Phi_\delta\hat{}(v) = (2\pi)^{n/2}\, 2^\delta\, \Gamma(\delta+1) |v|^{-(n/2+\delta)} J_{n/2+\delta}(|v|)\,.$$ $\boxed{4}$

(ii) Für $\delta > (n-1)/2$ gilt $\Phi_\delta\hat{} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nutzen Sie hierbei für $\nu > 3/2$ ohne Beweis, dass $J_\nu(t) = \mathcal{O}(t^{-1/2}) \quad (t \to \infty)\,.$ $\boxed{4}$

Hinweis: Lit. A II 7 (Stein–Weiss), pp. 158-159, 171-172

Aufgabe 6: Seien $\delta > \delta_0 := (n-1)/2$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, und $S_R^\varphi f := \varphi_R^\delta * f$ mit $\varphi_R^\delta(x) := R^n (2\pi)^{-n} \Phi_\delta^\wedge(Rx)$. Zeigen Sie:

a) $\lim\limits_{R\to\infty} \big\| S_R^\delta f - f \big\|_p = 0\,,$ $\boxed{1}$

b) $\lim\limits_{R\to\infty} S_R^\delta f(x) = f(x) \quad$ f. ü. $\boxed{3}$

$\boxed{\boxed{46}}$