

12. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 23.01.2004 vor der Übung)

Aufgabe 1: Zeigen Sie unter Verwendung der Poisson-Summationsformel:

$$\pi^{1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{4}(x+2\pi k)^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k^2} e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{4\pi\rho}{\omega_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + \rho^2[x + 2k\pi]^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|k|/\rho} e^{-ikx} \quad (x \in \mathbb{R}, \rho > 0),$$

$$\frac{-2}{\log r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2k\pi}{\log r}\right)^2} = p_r(x) \quad (x \in \mathbb{R}, r \in (0, 1)),$$

wobei p_r der Abel-Poisson-Kern aus Übung 2, Aufgabe 2 ist.

16

Definition:

- a) Eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **lokal von beschränkter Variation auf \mathbb{R}** ($g \in BV_{loc}(\mathbb{R})$), falls $g \in BV[\alpha, \beta]$ für alle $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.
- b) Eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **von beschränkter Variation auf \mathbb{R}** ($g \in BV(\mathbb{R})$), falls $g \in BV_{loc}(\mathbb{R})$ und eine Konstante $M < \infty$ existiert, so dass $[Var g]_{\alpha}^{\beta} \leq M$ für alle $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie für $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$:

- a) Die Reihe $2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(x + 2k\pi)$ ($=: g^*(x)$) konvergiert absolut und gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, und $g^* \in BV_{loc}(\mathbb{R})$.
- b) Falls zusätzlich $g(x) = \frac{1}{2}(g(x+) + g(x-))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, so folgt

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(x + 2k\pi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^m g^{\wedge}(k) e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

10

6

Hinweis: Folgerung 2.36 und Lit. B VIII 2 (Achieser), p. 126 bzw. B VIII 3 (Butzer-Nessel), pp. 124, 202

Aufgabe 3: Sei $\theta \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ eine gerade Funktion mit den Eigenschaften $\theta(0) = 1$, $(\theta(k/\rho))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$ für ein $\rho > 0$ und $\theta^\wedge \in L^1(\mathbb{R})$. Für $f \in L^1_{2\pi}$ seien

$$C_\rho(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta\left(\frac{k}{\rho}\right) e^{ikx},$$

$$U_\rho(f; x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta\left(\frac{k}{\rho}\right) f^\wedge(k) e^{ikx} = (f * C_\rho)(x).$$

Man zeige $U_\rho(f; x) = \frac{1}{2\pi}(f * \chi_\rho)(x)$ f.ü., wobei $\chi_\rho(x) := \rho \theta^\wedge(\rho x)$, d.h.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta\left(\frac{k}{\rho}\right) f^\wedge(k) e^{ikx} = \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \theta^\wedge(\rho u) du \quad (f.\ddot{u}).$$

Hinweis: Benutzen Sie Satz 2.13 der Vorlesung.

8

40