Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. L. Stens, Tel.: 80-94532
Dipl.-Math. A. Haß, Tel.: 80-94317

Aachen, den 14.10.2003

1. Übung zur Fourier-Analysis I

(Abgabe: 24.10.2003 vor der Übung)

Übungen: Die Übungsblätter werden wöchentlich herausgegeben. Sie sind auch im Internet erhältlich unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de/lehre/ws03/fourier-analysis.

Die Homepage des Lehrstuhls A für Mathematik finden Sie unter

http://www.mathA.rwth-aachen.de.

Scheinbedingungen: Maximal zwei Personen dürfen eine gemeinsame Lösung abgeben (Namen und Matrikelnummern nicht vergessen!). Diplomkandidaten erhalten einen Übungsschein und Lehramtskandidaten einen qualifizierten Studiennachweis, falls mindestens 50% der Übungspunkte erreicht werden. Als Lehramtskandidat können Sie einen Leistungsnachweis erwerben, indem Sie zusätzlich eine mündliche Prüfung bestehen.

Termine:
Vorlesung: Mo 10.00 – 11.30 Uhr, Hörsaal V, Di 11.45 – 13.15 Uhr, Hörsaal III
Übung: Fr 10.00 – 11.30 Uhr, Hörsaal III
Diskussion: nach Vereinbarung

Aufgabe 1: Sei $f \in L^1_{2\pi}$. Dann gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du = \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u)\,du\,.$$

$\boxed{3}$

Aufgabe 2:

a) Man zeige für den **Kern von Dirichlet** (Dirichlet: 1805-1859)

$$D_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}, \qquad (m \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}):$$

$$D_m(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx = \begin{cases} \dfrac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 2\pi j \\ 2m+1, & x = 2\pi j \end{cases} \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

$\boxed{5}$

b) Man zeige für den **Kern von Fejér** (Fejér: 1880–1959):

$$F_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} \Big(1 - \frac{|k|}{m+1}\Big) e^{ikx} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}\left(\dfrac{\sin\frac{m+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2, & x \neq 2\pi j \\ m+1, & x = 2\pi j \end{cases} \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

$\boxed{7}$

Aufgabe 3: Beweisen Sie folgende Aussagen für die **Fourier-Koeffizienten** einer Funktion $f \in L^1_{2\pi}$, definiert durch

$$f^\wedge(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku}\, du \quad (k \in \mathbb{Z}) \;:$$

a) $[f(\cdot + h)]^\wedge(k) = e^{ikh} f^\wedge(k) \quad (k \in \mathbb{Z},\, h \in \mathbb{R})$.

b) $[e^{-ij\cdot} f(\cdot)]^\wedge(k) = f^\wedge(k + j) \quad (k, j \in \mathbb{Z})$.

c) $[\overline{f}(-\cdot)]^\wedge(k) = \overline{f^\wedge(k)} = [\overline{f}]^\wedge(-k) \quad (k \in \mathbb{Z})$.

d) Ist f reellwertig, dann auch $S_m(f; x)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$, wobei die m-te **Partialsumme der Fourier-Reihe** von f definiert ist durch

$$S_m(f; x) := \sum_{k=-m}^{m} f^\wedge(k)\, e^{ikx} \,.$$

$\boxed{4}$

Aufgabe 4: Man zeige, dass für $f \in L^1_{2\pi}$ zwischen den Fourier-Koeffizienten $f^\wedge(k)$ und den **reellen Fourier-Koeffizienten**, definiert durch

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku\, du, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku\, du \quad (k \in \mathbb{N}_0)\,,$$

die folgenden Beziehungen bestehen:

$$f^\wedge(0) = \frac{a_0}{2}, \quad f^\wedge(k) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad f^\wedge(-k) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Wie sieht die Fourier-Reihe in der reellen Form aus? $\boxed{2}$

Aufgabe 5: Man bestimme die (trigonometrischen) Fourier-Koeffizienten folgender Funktionen (jeweils 2π-periodisch fortgesetzt).

a) **Euler-Spline** (Euler: 1707–1783)

$$f_1(x) := \operatorname{sgn}(\sin x) \quad (x \in [0, 2\pi])\,;$$

dabei ist die **Signum-Funktion** definiert als $\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ $\boxed{2}$

b) **Bernoulli-Spline** (Jakob I Bernoulli: 1654–1705)

$$f_2(x) := \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

$\boxed{5}$

c) $f_3(x) := \begin{cases} \log \frac{1}{|2 \sin \frac{x}{2}|}, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & x = 0,\, x = 2\pi. \end{cases}$ $\boxed{6}$

$\boxed{\boxed{34}}$