LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 11. November 2003

5. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 18. 11. 2003, bis 15:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Aufgabe 15 (Inhomogenes lineares parameterabhängiges Gleichungssystem der Ordnung 2)
Lösen Sie, abhängig von $a \in \mathbb{R}$, die Gleichung

$$x(t+2) + a \cdot x(t+1) + x(t) = 2^t$$

für den Startwert $x(0) = 0, x(1) = 0$. *Hinweis:* Dazu können Sie schrittweise vorgehen: Welche Lösungen hat das homogene System für beliebige Startwerte? Können Sie eine Lösung des inhomogenen Systems bestimmen? Wie kann man diese eine Lösung mit den „homogenen" Lösungen so kombinieren, dass die gesuchte Lösung entsteht?

Aufgabe 16 (Unser Dauerbrenner: Logistische Gleichung. Heute: $r = 4$.) Es sei die Logistische Gleichung für $r = 4$ gegeben:

$$x(t+1) = 4 \cdot x(t)(1 - x(t))$$

für $x : \mathbb{N}_0 \to [0,1]$ gegeben. Nach Aufgabe 12 von Blatt 4 hat jede Lösung die Form $x(t) = sin^2(2^t \pi\alpha)$ mit einem α in $[0, \frac{1}{2}]$ und die dyadische Entwicklung von $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} d_k 2^{-k}$, $d_k \in \{0,1\}$, $d_1 = 0$, ist von besonderer Bedeutung für das asymptotische Verhalten der Lösungen.

a) Finden Sie einen Anfangswert $x(0)$, so dass die Lösung dicht im Intervall $[0,1]$ liegt, d.h. dass die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x(t0))_{t \in \mathbb{N}_0}$ dicht in $[0,1]$ liegt.

b) Betrachten Sie $\alpha := \sum_{n \geq 1} 2^{-n^2}$. Welche Häufungspunkte hat die Folge $(sin^2(2^t \pi\alpha))_{t \in \mathbb{N}_0}$?

Aufgabe 17 (1000 Blumentöpfe) Stellen Sie sich 1000 Blumentöpfe vor. Auf diese Töpfe werden zufällig $q \in \mathbb{N}$ Samen verteilt und wachsen gelassen. Wir unterscheiden für jeden Topf:

1. Kein Samen landet hier: Folglich wächst in diesem Top nichts.
2. Genau ein Samen landet hier: Eine neue Pflanze wächst und gedeiht und bringt q neue Samen hervor.
3. Mehrere Samen landen in einem Topf: Wir unterscheiden zwei Modelle.
   (i) Die Konkurrenzsituation führt dazu, dass alle Pflanzen in diesem Topf eingehen.
   (ii) Eine Pflanze im Topf setzt sich gegen die anderen durch und bringt q neue Samen hervor.

Am Ende des Jahres werden die produzierten Samen geerntet und die Pflanzen gehen ein. Im nächsten Frühjahr werden die Samen wieder zufällig (Für jedes Samenkorn: gleiche Wahrscheinlichkeit für jeden Topf) auf die 1000 Töpfe verteilt und das Experiment wird wiederholt.
Auf der Internetseite zu den Übungen finden Sie zwei Maple$^{\text{TM}}$-worksheets für beide Varianten (i) und (ii), dass die Generationenfolge der Pflanzen simuliert.

a) Welches worksheet ist für Variante (i), welches für Variante (ii)?

b) Variieren Sie $q \in \mathbb{N}$ in beiden Varianten. Für welche Werte von q erhalten Sie welche Art von Lösungen? Pendeln sich die Lösungen gegen einen bestimmten Wert ein?