LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. S. Walcher,
Dipl.-Math. S. Mayer

Aachen, den 20. Januar 2004

12. Übung zu Dynamische Systeme und Modellierung

Abgabe: Dienstag, den 27. 1. 2004, bis 16:30 Uhr im Kasten vor Raum HG 155

Organisatorisches:
Am 29. Januar, 10 Uhr, findet an Stelle der Übung im Seminarraum die Vorlesung im Hörsaal V statt. Dafür wird am Montag, dem 2. Januar um 14:15 Uhr, die Übung an Stelle der Vorlesung im Seminarraum 248 abgehalten.

Aufgabe 35 (3 Punkte)

a) a1) Sei $\dot{x} = f(x)$ eine Differentialgleichung im R^n (und wie üblich sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ lokale Lipschitzabbildung. Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ein abstoßender stationärer Punkt, d.h. y_0 sei asymptotisch stabil für die Gleichung $\dot{x} = -f(x)$. Zeigen Sie: $y_0 \in \omega(y) \Rightarrow y = y_0$.

a2) $n = 2$: Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, positiv invariant und enthalte nur einen stationären Punkt, der abstoßend ist. Weiter enthalte K eine nichtleere offene Menge und mit offenem $U \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset U$ sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Es gibt eine geschlossene Lösungskurve in K.

b) Dulacs Kriterium: Zeigen Sie:

Sei $U^* \subset U \subset \mathbb{R}^2$ nichtleer, offen und beschränkt, und $\mathbb{R}^2 \setminus U^*$ habe genau zwei Zusammenhangskomponenten. Weiter sei $\operatorname{div} f(x) \leq 0$ für alle $x \in U^*$ und $\{x \in U^* : \operatorname{div} f(x) = 0\}$ enthalte keine nichtleere offene Menge. Dann gibt es in U^* höchstens eine geschlossene Lösungskurve.

Der Integralsatz von Gauss könnte hilfreich sein.

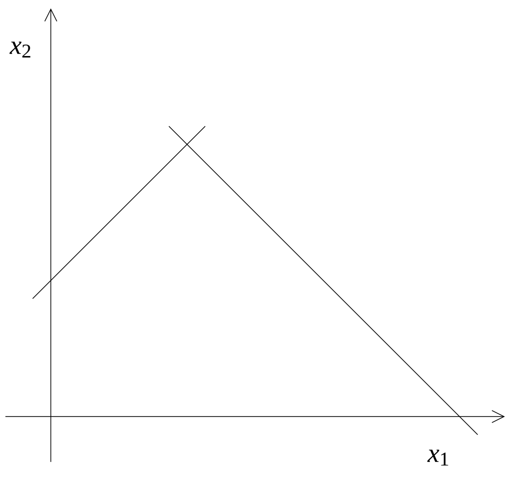

Abbildung 1: Wahl von φ und ψ (Aufgabe 36)

Aufgabe 36 (Der „Brüsselator“, 1 Punkt) Die Gleichung in $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x}_1 = a - bx_1 + x_1^2 x_2 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = bx_1 - x_1^2 x_2$$

(kurz: $\dot{x} = f(x)$; a und b sind positive Konstanten) modelliert eine chemische Reaktion, wobei die x_i für Konzentrationen gewisser Substanzen stehen.

a) Zeigen Sie: Der positive Quadrant P ist positiv invariant.

b) Zeigen Sie: Für jedes $y \in P$ existiert $S(t,y)$ für alle $t > 0$. *Hinweis:* Betrachten Sie $\varphi(x) := x_1 + x_2 - \alpha$ und $\psi(x) := x_2 - x_1 - \beta$, für geeignete $\alpha, \beta > 0$. Vergleiche Abbildung 1.

Aufgabe 37 Für reelles α sei die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ mit

$$f_\alpha(x) = \begin{pmatrix} (x_1^2 + x_1)(x_1^2/3 + x_1/9 - 2/27) + 4x_2 \\ -x_2^3/2 + x_2(x_1^3 + x_1^2 - 2/27) + 2x_1(3x_1 + 2) \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Mit $\varphi(x) = x_1^3 + x_1^2 - x_2^2$ verifizieren Sie

$$L_{f_\alpha}(\varphi)(x) = \varphi(x)(\varphi(x) - 4/27) - 2\alpha x_2^2 \,.$$

Insbesondere ist φ lösungserhaltend von $\dot{x} = f_0(x)$ in $\dot{x} = x(x - 4/27)$.

b) Für $\dot{x} = f_0(x)$ ($\alpha = 0$): Zeigen Sie, dass die Mengen $Y_1 := \{x \mid \varphi(x) = 0\}$ und $Y_2 := \{x \mid \varphi(x) = 4/27\}$ invariant sind. Begründen Sie, dass jeder stationäre Punkt von f_0 auf $Y_1 \cup Y_2$ liegt. Bestimmen Sie alle stationären Punkte nebst ihrer Stabilität. Bestimmen Sie für jeden Punkt im Inneren V der „Schleife“ $\{x \mid \varphi(x) = 0, x_1 \leq 0\}$ seine α- und ω-Limesmenge, so weit möglich (unter mangelnder Berücksichtigung von Grenzfällen).

c) Zeigen Sie, dass für kleine $\alpha < 0$ ist V (für f_α) positiv invariant und begründen Sie, dass V die Bahn einer nichtkonstanten periodischen Lösung enthält.

d) Lassen Sie Maple eine Phasenraumportrait zeichnen.