

11. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, den 15.01.2004, vor der Übung)

Aufgabe 1: Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich sowie die erste Ableitung.

a)* $a(x) = \ln(1 - x^2)$, b) $b(x) = [\ln(x^2 - 6x + 8)]^2$,

c)* $c(x) = \frac{1}{\ln(x - 5)}$, d) $d(x) = \left[\frac{x}{\ln(x^2 - 1)} \right]^2$.

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen hinsichtlich folgender Gesichtspunkte: i) Definitionsbereich, ii) Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs, iii) Nullstellen, iv) Monotoniebereiche, v) Extrema. Fertigen Sie anschließend eine Skizze an!

a) $a(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$, b)* $b(x) = \ln\left(\frac{x^2}{4} + 1\right)$, c) $c(x) = x \cdot \ln x$.

Aufgabe 3: Es sei $t \in \mathbb{R}$. Führen Sie für die folgenden Funktionen das Programm aus Aufgabe 2 durch. Fertigen Sie jeweils eine Skizze für $t = -2$ und für $t = 2$ an.

a)* $f_t(x) = \ln(1 + tx^2)$, b) $g_t(x) = \frac{t - x^2}{e^{x-t}}$.

Aufgabe 4: Durch Atemluft, Haut, Nahrung und Wasser nimmt der Mensch täglich radioaktive Stoffe auf, die sich im Körper anlagern. Insbesondere bei Atomversuchen und Unfällen in Kernkraftwerken wird eine erhebliche Menge an gefährlichen Substanzen vom Körper aufgenommen. Durch das allgemeine Zerfallsgesetz $M(t) = M(0)e^{-\lambda t}$ für ein $\lambda \geq 0$ kann berechnet werden, welche Masse eines radioaktiven Stoffes nach einer bestimmten Zeit noch im Körper vorhanden ist. $M(0)$ bezeichnet dabei die zu Beginn aufgenommene Menge, $M(t)$ die Menge, die zu einem Zeitpunkt t noch nachgewiesen werden kann.

a)* Jod 131 lagert sich fast ausschließlich in der Schilddrüse an und kann Schilddrüsenkrebs auslösen. Es besitzt eine Halbwertszeit von $T = 8$ Tagen. Es wurde 1 mg

aufgenommen. Zu einem späteren Zeitpunkt sind noch $320 \mu g$ in der Schilddrüse nachweisbar. Welche Zeit ist seit der Aufnahme vergangen?

b) Das Edelgas Krypton 85 wird durch die Atmung im gesamten Körper verteilt. Es besitzt eine Halbwertszeit von $T = 10,7$ Jahren. Nach 5 Jahren wurden $4 mg$ Krypton 85 im Körper gefunden. Welche Menge wurde ursprünglich aufgenommen?

c)* Tellur 132 ist ein radioaktives und zugleich giftiges Halbmetall mit der Zerfallskonstanten $\lambda = 0,006931[\frac{1}{Tag}]$, das im Stoffwechsel der Leber nachweisbar ist. Es sind 45 Tage nach der Aufnahme noch $3,5 mg$ vorhanden. Welche Halbwertszeit besitzt Tellur 132? Wie viel wurde zu Beginn aufgenommen?

d) Caesium 137 sammelt sich in allen Muskeln und hat eine Halbwertszeit von $T = 30,2$ Jahren. Es wurden $1,5 mg$ aufgenommen. Wie viel ist davon nach 20 Jahren noch vorhanden?

e)* Das Leichtmetall Barium 140 lagert sich bevorzugt in den Knochen ab. Bestimmen Sie die Zerfallskonstante λ und die Halbwertszeit T , wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ $250 \mu g$ aufgenommen wurden und nach 25 Tagen noch $65,93 \mu g$ nachweisbar sind.

Aufgabe 5: Geben Sie zu den folgenden Funktionen jeweils den maximalen Definitionsbereich und eine Stammfunktion an!

a) $f(x) = x^5 - \frac{3}{5}x^4 + 3x - 1,$

b)* $g(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 5 + 2x^2,$

c) $h(x) = x^3 + 3^x,$

d)* $k(x) = \sqrt[4]{16x} + x^{-1} + x^{-2},$

e) $j(x) = e^{4x} + 2^x - x^{-4},$

f)* $i(x) = \frac{1}{2x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$