LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
P. - M. Küpper

Aachen, den 13.11.2003

5. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, den 20.11.2003, vor der Übung)

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge a_n, und geben Sie ein $N \in \mathbb{R}$ an, so dass für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-3}$.

a)* $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$, b) $a_n = \frac{6n-2}{3n+7}$, c)* $a_n = \frac{n^2+n}{2n^2+1}$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie, falls möglich, den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a)* $a_n = \frac{n^2+7n-3}{2n^2-5n+6}$, b) $a_n = \frac{3n^3-1}{4n^2+2}$, c) $a_n = \frac{n+1}{2n^2+1}$, d)* $a_n = \frac{2n+(-1)^n n}{n}$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

a) $a_n = \left(6 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{2n+1} - 1\right)$, b)* $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{2n^2+1}}$,

c) $a_n = \sqrt[n]{q}$ (mit $0 < q \leq 1$)).

Aufgabe 4: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergiert gegen die Eulersche Zahl $e = 2.718\ldots$ Bestimmen Sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a)* $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$, b) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n}$, c) $a_n = \left(\frac{4n+1}{4n}\right)^n$,

d)* $a_n = \left(\frac{4n-1}{4n-2}\right)^n$, e)* $a_n = \left(\frac{4n-2}{4n-1}\right)^n$, f) $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5}$.

Aufgabe 5: Berechnen Sie, falls möglich, den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$, b)* $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-4n+5}$,

c) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

Aufgabe 6: Zeigen Sie durch Anwendung des Satzes über monotone und beschränkte Folgen (Monotoniekriterium, Satz (2.6) der Vorlesung), dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert a.

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}\sqrt{a_n^2 + 1},$

b)* $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1,$

c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1,$

d) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = a_n(2 - a_n).$

Anleitung: Zeigen Sie, dass die Folgen monoton und beschränkt sind, und folgern Sie daraus mit Satz (2.6) der Vorlesung die Konvergenz. Bestimmen Sie den Grenzwert, indem Sie benutzen, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und $(a_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ denselben Grenzwert besitzen.