Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
P. - M. Küpper

Aachen, den 30.10.2003

3. Übung zur Mathematik für Biologen

(Abgabe: Donnerstag, den 06.11.2003, vor der Übung)

Aufgabe 1 : Bestimmen Sie alle $x, y, z \in \mathbb{R}$, die folgende Gleichungen erfüllen:

a)*
$$\begin{aligned} 3x + 4y + z &= 23 \\ x + 2z &= 12 \\ y + z &= 8 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 8 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 17 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 8 \\ x + 2y + z &= 8 \\ x + y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 3 \\ x + 3y + z &= 10 \\ x + y - z &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 : Es liegen drei Lösungen A, B und C desselben Stoffes vor, wobei A 6 %ig und B 12 %ig sei.

a)* Wie viel muss man von den Lösungen mischen, um einen Liter einer 10 %igen Lösung zu erhalten?

b) Eine Mischung aus einem Liter von A, zwei Litern von B und 15 Litern von C ist 1 %ig. Wie hoch ist die Konzentration in C?

Aufgabe 3*: Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung mittels vollständiger Induktion: Sei a eine reelle Zahl mit $a > -1$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Aufgabe 4 : Führen Sie den Induktionsschluss von $A(n)$ auf $A(n + 1)$ durch:

a)* $A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2n+1}{n+1}$, $\qquad$ b) $A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Welche der beiden Aussagen $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 5*: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen n und alle von 1 verschiedenen reellen Zahlen q:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Aufgabe 6 : Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Richtigkeit der Aussagen A(n):

a)* $A(n): \quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2,$

b) $A(n): \quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j-1} \cdot j^2 = n(2n-1),$

c) $A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$

d)* $A(n): \quad n! \geq 2^{n-1}.$

Aufgabe 7*: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ gilt:

$$2^n \geq n^3.$$

Aufgabe 8 : Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten, indem Sie so weit wie möglich kürzen:

a)* $\binom{100}{96}$, b)* $\binom{15}{3}$, c) $\binom{30}{28}$, d) $\binom{25}{2}$.