Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
P. - M. Küpper

Aachen, den 18.12.2003

Probeklausur zur Mathematik für Biologen

Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 20 der 52 möglichen Punkte.
(Bearbeitungszeit: 2 Stunden)

Aufgabe 1:

a) Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

(i) $\dfrac{a^4c - 2a^2b^2c + b^4c}{c^2(a-b)(a^2+2ab+b^2)}$, $a, b, c \in \mathbb{N}, a \neq \pm b$, $\boxed{2}$

(ii) $\dfrac{(2p^{-6}q^3)^{-3}}{(2p^5q^{-2})^4}$, $p, q > 0$. $\boxed{2}$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung: $\boxed{4}$

$$|x-6| \cdot x \geq x.$$

Aufgabe 2: Zwei Thermoskannen mit jeweils einem Liter Fassungsvermögen sind mit einer Kaffee-Milch-Mischung gefüllt. In Kanne A seien 10%, in Kanne B 2% Milch, der Rest ist jeweils Kaffee.

a) Wie viel muss man aus jeder Kanne nehmen, um eine Tasse ($= 200\,ml$) Kaffee mit einem 5%igen Milchanteil zu erhalten? $\boxed{3}$

b) Die Mischung aus $50\,ml$ aus Kanne A, $75\,ml$ aus Kanne B und $125\,ml$ aus einer weiteren Kanne C ist 6%ig. Wie hoch ist der Milchanteil in Kanne C? $\boxed{2}$

Aufgabe 3: $\boxed{5}$

Es liege eine Kultur von anfänglich $3 \cdot 10^6$ Bakterien vor. Von diesen sterben ständig so viele, dass nach einem Tag nur noch 85% des ursprünglichen Bestandes vorhanden sind. Um die Verluste auszugleichen, werden jeweils nach einem Tag $4 \cdot 10^5$ Bakterien zur Kultur hinzugefügt.

Ermitteln Sie eine Formel für die Anzahl der Bakterien nach n Tagen und berechnen Sie, wie viele Bakterien sich nach 14 Tagen in der Kultur befinden.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen, die gegeben sind durch

a) $a_n = \left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^{4n+3}$, $\boxed{3}$

b) $b_n = \sqrt{4n^2 - 5n + 1} - (2n+1)$, $\boxed{4}$

c) $c_n = \dfrac{-2n^3 + 3n^2 - 1}{-4n^3 - 2n^2 + 5n + 10}$. $\boxed{2}$

Aufgabe 5: $\boxed{4}$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über monotone und beschränkte Folgen die Konvergenz der rekursiv definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben ist durch

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst mit vollständiger Induktion, dass $a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Untersuchen Sie die Folge anschließend auf Monotonie und berechnen Sie dann den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergieren; berechnen Sie in a) zusätzlich den Wert der Reihe. Dabei sei

a) $a_k = \left(\frac{2}{5}\right)^k$, $\boxed{2}$

b) $a_k = \dfrac{k^2-2k+1}{4k^4+3k^2+1}$. $\boxed{4}$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich sowie die erste Ableitung. (Vereinfachen der beim Ableiten auftretenden Ausdrücke ist nicht erforderlich.)

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+1}}$ $\boxed{2}$

b) $g(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{7}}+3x-1}{x^2+2x-8}$ $\boxed{2}$

Aufgabe 8: Sei $t \in \mathbb{R}$ mit $t \neq 0$. Bestimmen Sie für die Funktion

$$f_t(x) = \frac{1}{tx^2-1}$$

a) den maximalen Definitionsbereich $D(f_t)$; $\boxed{2}$

b) die Nullstellen; $\boxed{1}$

c) das Verhalten von $f_t(x)$ an den Rändern des Definitionsbereichs (auch für $x \to \pm\infty$); $\boxed{3}$

d) die relativen Extrema. $\boxed{2}$

e) Skizzieren Sie die Graphen zu den Funktionen $f_2(x)$ und $f_{-2}(x)$ möglichst genau mit Hilfe der unter a)–d) gewonnenen Informationen. $\boxed{3}$

Beachten Sie, dass t sowohl positive wie negative Werte annehmen kann!