Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
P. - M. Küpper

Aachen, den 15.01.04

Musterlösung
zur Probeklausur zur Mathematik für Biologen

Aufgabe 1:

a) Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich:

(i) $\dfrac{a^4c - 2a^2b^2c + b^4c}{c^2(a-b)(a^2+2ab+b^2)}$, $a, b, c \in \mathbb{N}, a \neq \pm b$, $\boxed{2}$

Lösung:

$$\frac{a^4c - 2a^2b^2c + b^4c}{c^2(a-b)(a^2+2ab+b^2)} = \frac{(a^2-b^2)^2}{c(a-b)(a+b)^2} = \frac{(a-b)^2(a+b)^2}{c(a-b)(a+b)^2} = \frac{a-b}{c}.$$

(ii) $\dfrac{(2p^{-6}q^3)^{-3}}{(2p^5q^{-2})^4}$, $p, q > 0$. $\boxed{2}$

Lösung:

$$\frac{(2p^{-6}q^3)^{-3}}{(2p^5q^{-2})^4} = \frac{2^{-3}p^{18}q^{-9}}{2^4p^{20}q^{-8}} = \frac{2^{-7}q^{-1}}{p^2} = \frac{1}{2^7p^2q}.$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung $|x-6| \cdot x \geq x$. $\boxed{4}$

Lösung: Unterscheide zwei Fälle:

<u>1.Fall: $x \geq 6$:</u>	<u>2.Fall: $x < 6$:</u>
$|x-6| \cdot x \geq x$	$|x-6| \cdot x \geq x$
$\iff (x-6) \cdot x \geq x$	$\iff -(x-6) \cdot x \geq x$
$\iff x^2 - 7x \geq 0$	$\iff -x^2 + 5x \geq 0$
$\iff x(x-7) \geq 0$	$\iff x(x-5) \leq 0$
$\iff (x \geq 0$ und $x \geq 7)$ oder $(x \leq 0$ und $x \leq 7)$	$\iff (x \leq 0$ und $x \geq 5)$ oder $(x \geq 0$ und $x \leq 5)$
$\iff x \geq 7$ oder $x \leq 0$	$\iff 0 \leq x \leq 5$
$\overset{x\geq 6}{\iff} x \geq 7$	$\overset{x<6}{\iff} 0 \leq x \leq 5$
$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$	$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$

$$\mathbb{L}_{\text{ges}} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5 \text{ oder } x \geq 7\}$$

Aufgabe 2: Zwei Thermoskannen mit jeweils einem Liter Fassungsvermögen sind mit einer Kaffee-Milch-Mischung gefüllt. In Kanne A seien 10 %, in Kanne B 2% Milch, der Rest ist jeweils Kaffee.

a) Wie viel muss man aus jeder Kanne nehmen, um eine Tasse (= 200 ml) Kaffee mit einem 5%igen Milchanteil zu erhalten? $\boxed{3}$

Lösung:

$x :=$ Menge aus der ersten Kanne in der Tasse in ml,
$y :=$ Menge aus der zweiten Kanne in der Tasse in ml.
Somit erhält man als erste Gleichung:

$$\text{(i) } x + y = 200\ ml.$$

Betrachtet man die Grundgleichung der Prozentrechnung $P = G \cdot \frac{p}{100}$ und setzt dabei
Grundwert $= G =$ Menge der Flüßigkeit in der Tasse $= 200\ ml$,
Prozentsatz $= p =$ Milchanteil in der Tasse $= 5$,
Prozentwert $= P =$ Absolute Milchmenge in der Tasse $= x \cdot \dfrac{10}{100} + y \cdot \dfrac{2}{100}$,
dann erhält man als zweite Gleichung:

$$\text{(ii) } x \cdot \frac{10}{100} + y \cdot \frac{2}{100} = 200\ ml \cdot \frac{5}{100}$$

$$\iff 10x + 2y = 1000\ ml.$$

Die beiden Gleichungen kann man zu einem Gleichungssystem zusammenfassen und mit Hilfe des Gaußalgorithmus lösen:

x	y		
1	1	200 ml	
10	2	1000 ml	$10Z_1 - Z_2$
1	1	200 ml	
0	8	1000 ml	$Z_2 : 8$
1	1	200 ml	
0	1	125 ml	$Z_1 - Z_2$
1	0	75 ml	
0	1	125 ml	

Nimmt man 75 ml aus der ersten und 125 ml aus der zweiten Kanne, erhält man eine Tasse Kaffee mit 5%igem Milchanteil.

b) Die Mischung aus 50 ml aus Kanne A, 75 ml aus Kanne B und 125 ml aus einer weiteren Kanne C ist 6%ig. Wie hoch ist der Milchanteil in Kanne C? $\boxed{2}$

Lösung:

Mit der Grundgleichung der Prozentrechnung $P = G \cdot \frac{p}{100}$ erhält man mit folgenden Setzungen:
Grundwert $= G =$ Gesamtmenge Kaffee der Mischung
$= 50\,ml + 75\,ml + 125\,ml = 250\,ml$,
Prozentsatz $= p =$ prozentualer Milchanteil in der Mischung $= 6$,
Prozentwert $= P =$ absoluter Milchanteil in der Mischung

$$= 50\ ml \cdot \frac{10}{100} + 75\,ml \cdot \frac{2}{100} + 125\,ml \cdot \frac{x}{100} = \frac{650 + 125x}{100}\,ml,$$

wobei x den gesuchten prozentualen Milchanteil in der Mischung bezeichne. Das liefert:

$$\begin{aligned} & \frac{650 + 125x}{100}\,ml = \frac{6}{100} \cdot 250\,ml \\ \Longleftrightarrow \quad & 650 + 125x = 1500 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = 6,8. \end{aligned}$$

In der Kanne C befinden sich also $6,8\%$ Milch.

Aufgabe 3: $\boxed{5}$

Es liege eine Kultur von anfänglich $3 \cdot 10^6$ Bakterien vor. Von diesen sterben ständig so viele, dass nach einem Tag nur noch 85% des ursprünglichen Bestandes vorhanden sind. Um die Verluste auszugleichen, werden jeweils nach einem Tag $4 \cdot 10^5$ Bakterien zur Kultur hinzugefügt.

Ermitteln Sie eine Formel für die Anzahl der Bakterien nach n Tagen und berechnen Sie, wie viele Bakterien sich nach 14 Tagen in der Kultur befinden.

Lösung:

$a_0 := 3 \cdot 10^6$,

a_n : Anzahl der Bakterien nach n Tagen. Man berechnet:

$a_1 = 3 \cdot 10^6 \cdot 0,85 + 4 \cdot 10^5$,

$$\begin{aligned} a_2 &= 0,85(3 \cdot 10^6 \cdot 0,85 + 4 \cdot 10^5) + 4 \cdot 10^5 \\ &= 0,85^2 \cdot 3 \cdot 10^6 + 0,85 \cdot 4 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 0,85(0,85^2 \cdot 3 \cdot 10^6 + 0,85 \cdot 4 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5) + 4 \cdot 10^5 \\ &= 0,85^3 \cdot 3 \cdot 10^6 + 0,85^2 \cdot 4 \cdot 10^5 + 0,85 \cdot 4 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Als allgemeine Formel erhält man:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0,85^n \cdot 10^6 \cdot 3 + \sum_{k=0}^{n-1} 4 \cdot 10^5 \cdot 0,85^k \\
&= 0,85^n \cdot 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 0,85^k \\
&\overset{\text{geom. Summe}}{=} 0,85^n \cdot 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 \frac{1-0,85^n}{1-0,85} \\
&= 0,85^n \cdot 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 \cdot \frac{20}{3} \cdot (1-0,85^n).
\end{aligned}
$$

Einsetzen von $n = 14$ liefert:

$$
\begin{aligned}
a_{14} &= 0,85^{14} \cdot 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 \cdot \frac{20}{3} \cdot (1-0,85^{14}) \\
&= (0,85^{14} \cdot 30 + 4 \cdot \frac{20}{3} \cdot (1-0,85^{14})) \cdot 10^5 \\
&\approx 27,009 \cdot 10^5 \approx 2,7 \cdot 10^6.
\end{aligned}
$$

Nach 14 Tagen befinden sich etwa $2,7 \cdot 10^6$ Bakterien in der Kultur.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen, die gegeben sind durch

a) $a_n = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{4n+3}$, $\boxed{3}$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{4n+3} = \left(\frac{2n+1+1}{2n+1}\right)^{4n+3} = \left(\frac{2n+1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\right)^{4n+3} \\
&= \left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n}\right)^2 \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^3 \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{-1}\right]^2 \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^3 \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^2 \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^1.
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^2 \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^1 = e^2 \cdot (1+0) = e^2.
$$

b) $b_n = \sqrt{4n^2 - 5n + 1} - (2n+1)$, $\boxed{4}$

Lösung:

$$b_n = \sqrt{4n^2 - 5n + 1} - (2n+1) \overset{\text{3. bin. Formel}}{=} \frac{\sqrt{4n^2 - 5n + 1}^2 - (2n+1)^2}{\sqrt{4n^2 - 5n + 1} + (2n+1)}$$

$$= \frac{4n^2 - 5n + 1 - 4n^2 - 4n - 1}{\sqrt{n^2(4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2})} + n(2 + \frac{1}{n})}$$

$$= \frac{-9n}{n(\sqrt{4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2 + \frac{1}{n})} = \frac{-9}{\sqrt{4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2 + \frac{1}{n}}.$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-9}{\sqrt{4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2 + \frac{1}{n}} = \frac{-9}{\sqrt{4 - 0 + 0} + 2 + 0} = -\frac{9}{4}.$$

c) $c_n = \dfrac{-2n^3 + 3n^2 - 1}{-4n^3 - 2n^2 + 5n + 10}$. $\boxed{2}$

Lösung:

$$c_n = \frac{-2n^3 + 3n^2 - 1}{-4n^3 - 2n^2 + 5n + 10} = \frac{n^3(-2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3})}{n^3(-4 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{10}{n^3})}.$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}}{-4 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{10}{n^3}} = \frac{-2 + 0 - 0}{-4 - 0 + 0 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 5: $\boxed{4}$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über monotone und beschränkte Folgen die Konvergenz der rekursiv definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben ist durch

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst mit vollständiger Induktion, dass $a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Untersuchen Sie die Folge anschließend auf Monotonie und berechnen Sie dann den Grenzwert der Folge.

Lösung:

1. Man beweise mit vollständiger Induktion, dass die Aussage $A(n) : a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dazu:

I.A. $n = 1 : a_1 = \frac{1}{2} \leq 1$ (wahr!).

I.V. $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

I.S. Zeige: Falls $A(n)$ gilt, dann gilt auch $A(n+1) : a_{n+1} \leq 1$.

Dazu: $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2} \overset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{1+1}{2} = 1$.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.

2. Untersuche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie:

$$a_2 = \frac{1+a_1}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \geq \frac{1}{2} = a_1,$$

$$a_2 = \frac{1+a_2}{2} = \frac{1+\frac{3}{4}}{2} = \frac{7}{8} \geq \frac{3}{4} = a_2.$$

Vermutung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, d. h. es gilt: $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2} \geq a_n \\ \iff \quad & 1 + a_n \geq 2a_n \\ \iff \quad & a_n \leq 1 \text{ (wahre Aussage, vgl. 1.)} \end{aligned}$$

Bisher wurde also gezeigt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und durch 1 nach oben beschränkt. Mit dem Satz über monotone und beschränkte Folgen gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen Grenzwert.
Es sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$. Damit erhält man:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a_n}{2} \overset{\text{GW ex.}}{=} \frac{1+\lim_{n\to\infty} a_n}{2} = \frac{1+a}{2}$$

$\iff 2a = 1 + a$

$\iff a = 1.$

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergieren; berechnen Sie in a) zusätzlich den Wert der Reihe. Dabei sei

a) $a_k = (\frac{2}{5})^k$, $\boxed{2}$

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k \overset{\text{geom. Summe}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{2}{5})^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1-0}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3},$$

die Reihe konvergiert also (gegen $\frac{5}{3}$).

b) $a_k = \dfrac{k^2-2k+1}{4k^4+3k^2+1}$. $\boxed{4}$

Lösung:

Untersuche $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2-2k+1}{4k^4+3k^2+1}$ mit dem Majorantenkriterium.

Vergleiche dazu a_k mit $c\cdot\frac{k^2}{k^4} = c\cdot\frac{1}{k^2}$ für ein $c>0$. Für $k\geq 1$ erhält man:

$$0 \leq a_k = \frac{k^2-2k+1}{4k^4+3k^2+1} \overset{\text{Zähler vergr.}}{\leq} \frac{k^2-0+k^2}{4k^4+3k^2+1} \overset{\text{Nenner verkl.}}{\leq} \frac{2k^2}{4k^4+0+0} = \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}.$$

Somit:

$$0 \leq a_k \leq \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2-2k+1}{4k^4+3k^2+1} \overset{a_0=1,a_1=0}{=} 1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2-2k+1}{4k^4+3k^2+1} \leq \underbrace{1+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}}_{\text{konvergente Majorante}}.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt die Konvergenz von $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2-2k+1}{4k^4+3k^2+1}$.

Aufgabe 7: Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich sowie die erste Ableitung.

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+1}}$ $\boxed{2}$

Lösung:

$\mathbb{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}} \frac{2x(x+1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$\left(= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}} \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^{1,5}(x^2+1)^{0,5}} \right).$$

b) $g(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{7}} + 3x - 1}{x^2 + 2x - 8}$ $\boxed{2}$

Lösung:

$$g(x) = \frac{x^{\frac{3}{7}} + 3x - 1}{x^2 + 2x - 8} = \frac{x^{\frac{3}{7}} + 3x - 1}{(x-2)(x+4)}, \text{ also } \mathbb{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}.$$

$$g'(x) = \frac{(\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} + 3)(x^2 + 2x - 8) - (x^{\frac{3}{7}} + 3x - 1)(2x + 2)}{(x^2 + 2x - 8)^2}$$

$$\left(= \frac{\frac{3}{7}x^{\frac{10}{7}} + \frac{6}{7}x^{\frac{3}{7}} - \frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}} + 3x^2 + 6x - 8 - (2x^{\frac{10}{7}} + 2x^{\frac{3}{7}} + 6x^2 - 2x - 2)}{(x^2 + 2x - 8)^2} \right.$$

$$\left. = \frac{-\frac{11}{7}x^{\frac{10}{7}} - 8x^{\frac{3}{7}} - \frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}} - 3x^2 - 2x - 6}{(x^2 + 2x - 8)^2} \right).$$

Aufgabe 8: Sei $t \in \mathbb{R}$ mit $t \neq 0$. Bestimmen Sie für die Funktion

$$f_t(x) = \frac{1}{tx^2 - 1}$$

a) den maximalen Definitionsbereich $D(f_t)$; $\boxed{2}$

Lösung:

$\mathbb{D}(f_t) = \mathbb{R}$, falls $t < 0$,

$\mathbb{D}(f_t) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{\sqrt{t}} \right\}$, falls $t > 0$

b) die Nullstellen, $\boxed{1}$

Lösung:

$f_t(x)$ besitzt keine Nullstellen.

c) das Verhalten von $f_t(x)$ an den Rändern des Definitionsbereichs (auch für $x \to \pm\infty$); $\boxed{3}$

Lösung:

Für $\underline{t > 0}$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_t(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f_t(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{\sqrt{t}}-} f_t(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{\sqrt{t}}+} f_t(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{\sqrt{t}}+} f_t(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{\sqrt{t}}-} f_t(x) = -\infty$

Für $\underline{t < 0}$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_t(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f_t(x) = 0$

d) relative Extrema. $\boxed{2}$

Lösung:

$f_t'(x) = \frac{0(tx^2 - 1) - 1(2tx)}{(tx^2 - 1)^2} = \frac{-2tx}{(tx^2 - 1)^2}$, man erhält somit:

$f_t'(x) = 0 \iff \frac{-2tx}{(tx^2 - 1)^2} = 0 \iff x = 0.$

Einzig mögliche relative Extremstelle ist also $x = 0$.

Desweiteren gilt für $\underline{t > 0}$:

$f_t'(x) > 0 \iff x < 0,$

$f_t'(x) < 0 \iff x > 0.$
Somit hat die erste Ableitung an der Stelle $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, also liegt an der Stelle $x = 0$ ein Maximum vor: Max$(0|f(0))$, also Max$(0|-1)$.

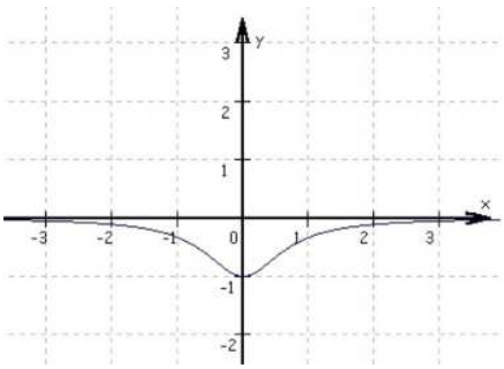
Für $\underline{t < 0}$ gilt:

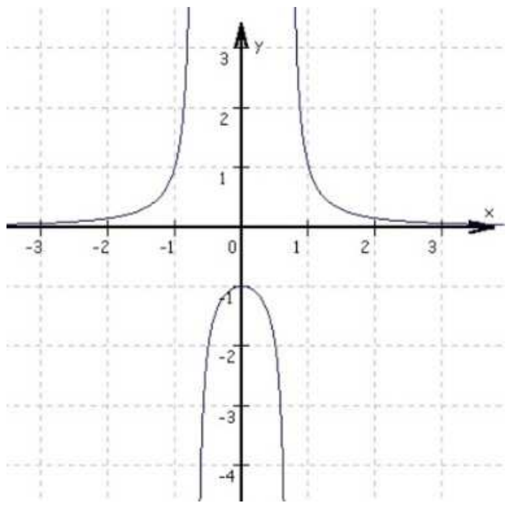
$f_t'(x) > 0 \iff x > 0,$

$f_t'(x) < 0 \iff x < 0.$
Somit hat die erste Ableitung an der Stelle $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$, also liegt an der Stelle $x = 0$ ein Minimum vor: Min$(0|f(0))$, also Min$(0|-1)$.

e) Skizzieren Sie die Graphen zu den Funktionen $f_2(x)$ und $f_{-2}(x)$ möglichst genau mit Hilfe der unter a)–d) gewonnenen Informationen. $\boxed{3}$

Lösung:





$$f_{-2}(x) = \frac{1}{-2x^2 - 1}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2x^2 - 1}$$