Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens
P. - M. Küpper

Aachen, den 30.01.04

Musterlösung
zur Klausur zur Mathematik für Biologen

Aufgabe 1:

a) Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich, wobei $a, b, x, y \in \mathbb{N}, x \neq y$.

(i) $\dfrac{(a^2-b^2)(x^2-2xy+y^2)}{(a+b)^2(x+y)^3(x-y)^2}$, $\boxed{2}$

Lösung:

$$\frac{(a^2-b^2)(x^2-2xy+y^2)}{(a+b)^2(x+y)^3(x-y)^2} = \frac{(a-b)(a+b)(x-y)^2}{(a+b)^2(x+y)^3(x-y)^2} = \frac{(a-b)}{(a+b)(x+y)^3}.$$

(ii) $\dfrac{(3a^{-6}b^4)^{-4}}{(9a^7b^{-3})^3}$. $\boxed{2}$

Lösung:

$$\frac{(3a^{-6}b^4)^{-4}}{(9a^7b^{-3})^3} = \frac{3^{-4}a^{24}b^{-16}}{(3^2)^3a^{21}b^{-9}} = 3^{-4-6}a^{24-21}b^{-16-(-9)} = \frac{a^3}{3^{10}b^7}.$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $|x-5| \cdot x \leq 3x$. $\boxed{4}$

Lösung: Unterscheide zwei Fälle:

<u>1.Fall: $x \geq 5$:</u>

$$\begin{aligned}
& |x-5| \cdot x \leq 3x \\
\iff\ & (x-5) \cdot x \leq 3x \\
\iff\ & x^2 - 8x \leq 0 \\
\iff\ & x(x-8) \leq 0 \\
\iff\ & (x \leq 0 \text{ und } x \geq 8) \\
& \text{oder } (x \geq 0 \text{ und } x \leq 8) \\
\iff\ & 0 \leq x \leq 8 \\
\overset{x \geq 5}{\iff}\ & 5 \leq x \leq 8
\end{aligned}$$

$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 8\}$

<u>2.Fall: $x < 5$:</u>

$$\begin{aligned}
& |x-5| \cdot x \leq 3x \\
\iff\ & -(x-5) \cdot x \leq 3x \\
\iff\ & -x^2 + 2x \leq 0 \\
\iff\ & x(x-2) \geq 0 \\
\iff\ & (x \geq 0 \text{ und } x \geq 2) \\
\text{oder}\ & (x \leq 0 \text{ und } x \leq 2) \\
\iff\ & x \leq 0 \text{ oder } x \geq 2 \\
\overset{x < 5}{\iff}\ & x \leq 0 \text{ oder } 2 \leq x < 5
\end{aligned}$$

$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ oder } 2 \leq x < 5\}$

$$\mathbb{L}_{\text{ges}} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ oder } 2 \leq x \leq 8\}$$

.

Aufgabe 2: Die empfohlene Tagesdosis an Vitamin C beträgt $60\,mg$. Es stehen zwei Fruchtsäfte A und B zur Verfügung; in $100\,ml$ von A sind $30\,mg$, in $100\,ml$ von B sind $5\,mg$ an Vitamin C enthalten.

a) Welchem Prozentsatz entspricht die jeweils angegebene Menge Vitamin C in jedem Saft? Wie viel Prozent Vitamin C enthält ein Saft, bei dem sich in $500\,ml$ genau $60\,mg$ Vitamin C befinden? $\boxed{3}$
(Gehen Sie bei der Berechnung des Prozentsatzes davon aus, dass $1\,mg$ gleichzusetzen ist mit $\frac{1}{1000}\,ml$!)

Lösung:

Es gilt die Grundgleichung der Prozentrechnung: $P = \frac{p}{100} \cdot G \iff p = 100 \cdot \frac{P}{G}$.
Dabei ist G der Grundwert, P der Prozentwert und p der Prozentsatz.

Für Saft A ergibt sich damit:

$P = 30\,mg = \frac{30}{1000}\,ml = 0,03\,ml$ und $G = 100\,ml$. Einsetzen liefert:

$$p = \frac{0,03\,ml}{100\,ml} \cdot 100 = 0,03.$$

Für Saft B erhält man:

$P = 5\,mg = \frac{5}{1000}\,ml = 0,005\,ml$ und $G = 100\,ml$. Einsetzen liefert:

$$p = \frac{0,005\,ml}{100\,ml} \cdot 100 = 0,005.$$

Für einen Saft, bei dem in $500\,ml$ genau $60\,mg$ Vitamin C enthalten sind, ergibt sich:

$P = 60\,mg = \frac{60}{1000}\,ml = 0,06\,ml$ und $G = 500\,ml$. Einsetzen liefert:

$$p = \frac{0,06\,ml}{500\,ml} \cdot 100 = 0,012.$$

Saft A enthält also $0,03\%$, Saft B $0,005\%$ und der letzte Saft $0,012\%$ Vitamin C.

b) Wie müssen die Säfte A und B gemischt werden, dass in $500\,ml$ der Mischung genau $60\,mg$ Vitamin C enthalten sind? $\boxed{3}$

Lösung:

$x :=$ Menge von Saft A in der Mischung in ml,
$y :=$ Menge von Saft B in der Mischung in ml.
Somit erhält man als erste Gleichung:

$$\text{(i) } x + y = 500\,ml.$$

Um eine zweite Gleichung zu finden, berechnet man mit der Grundgleichung der Prozentrechnung $P = G \cdot \frac{p}{100}$ die Prozentwerte der beiden Komponenten. Die benötigten

Prozentsätze sind in Teil a) berechnet worden. Man setzt dann

$$\begin{aligned}&\text{Prozentwert der 1. Komponente} + \text{Prozentwert der 2. Komponente}\\ = {} & \text{absoluter Vitamin-C-Gehalt der Mischung,}\end{aligned}$$

so dass man als zweite Gleichung erhält:

$$\text{(ii) } x \cdot \frac{0,03}{100} + y \cdot \frac{0,005}{100} = 0,06\,ml$$

$$\iff \; 30x + 5y = 6000\,ml.$$

Die beiden Gleichungen kann man zu einem Gleichungssystem zusammenfassen und mit Hilfe des Gaußalgorithmus lösen:

x	y		
1	1	500 ml	
30	5	6000 ml	$30Z_1 - Z_2$
1	1	500 ml	
0	25	9000 ml	$Z_2 : 25$
1	1	500 ml	
0	1	360 ml	$Z_1 - Z_2$
1	0	140 ml	
0	1	360 ml	

Nimmt man 140 ml von Saft A und 360 ml von Saft B, erhält man 500 ml Saft, der genau 60 mg Vitamin C enthält.

c) Wie viel mg Vitamin C müssen 750 ml Saft enthalten, damit der Prozentsatz an Vitamin C 0,01 % beträgt? $\boxed{1}$

Lösung:

Betrachtet man wieder die Grundgleichung der Prozentrechnung $P = \frac{p}{100} \cdot G$ und setzt $G = 750\,ml$, $p = 0,01$, dann berechnet man als gesuchten Prozentwert:

$$P = \frac{0,01}{100} \cdot 750\,ml = \frac{7,5}{100}\,ml = \frac{75}{1000}\,ml = 75\,mg.$$

In 750 ml Saft müssen also 75 mg Vitamin C enthalten sein, damit der Prozentsatz 0,01 % beträgt.

Aufgabe 3: $\boxed{4}$

Das statistische Bundesamt in Deutschland hat bekannt gegeben, dass im Jahr 2000 in NRW genau $18 \cdot 10^6$ Menschen gelebt haben. Man kann davon ausgehen, dass die Bevölkerung jedes Jahr um 1% abnimmt, da die Geburtenrate kleiner ist als die Sterberate. Zusätzlich wandern aber jährlich $2 \cdot 10^5$ Menschen in dieses Bundesland ein. Ermitteln Sie nach diesen Angaben eine Formel, die beschreibt, wie viele Menschen voraussichtlich nach n Jahren in NRW leben werden und berechnen Sie, wieviele Menschen 2005 in NRW leben werden.

Lösung:

$a_0 := 18 \cdot 10^6$,

a_n : Anzahl der Anzahl der Menschen, die im Jahr $200n$ in NRW leben werden. Man berechnet:

$$a_1 = 0,99 \cdot 18 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5,$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 0,99 \cdot (0,99 \cdot 18 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5) + 2 \cdot 10^5 \\ &= 0,99^2 \cdot 18 \cdot 10^6 + 0,99 \cdot 2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 0,99 \cdot (0,99^2 \cdot 18 \cdot 10^6 + 0,99 \cdot 2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5) + 2 \cdot 10^5 \\ &= 0,99^3 \cdot 18 \cdot 10^6 + 0,99^2 \cdot 2 \cdot 10^5 + 0,99 \cdot 2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Als allgemeine Formel erhält man:

$$\begin{aligned} a_n &= 0,99^n \cdot 18 \cdot 10^6 + \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cdot 10^5 \cdot 0,99^k = 0,99^n \cdot 18 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 0,99^k \\ &\overset{\text{geom. Summe}}{=} 0,99^n \cdot 18 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{1 - 0,99^n}{1 - 0,99} \\ &= 0,99^n \cdot 18 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^7 \cdot (1 - 0,99^n). \end{aligned}$$

Einsetzen von $n = 5$ liefert:

$$a_5 = 0,99^5 \cdot 18 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^7 \cdot (1 - 0,99^5) \approx 18,0980199 \cdot 10^6 \approx 18,098020 \cdot 10^6.$$

Im Jahr 2005 leben nach diesem Modell etwa $18,098020 \cdot 10^6$ Menschen in NRW.

Ein anderer möglicher Lösungsweg ist die Aufstellung einer Rekursionsformel, nämlich

$$a_0 := 18 \cdot 10^6, \quad a_n = 0,99 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot 10^5.$$

Fünfmalige Anwendung dieser Formel liefert dasselbe Ergebnis wie oben.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen, die gegeben sind durch

a) $a_n = \left(\dfrac{3n+3}{3n+2}\right)^{9n+7}$, $\boxed{3}$

Lösung:

$$a_n = \left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^{9n+7} = \left(\frac{3n+2+1}{3n+2}\right)^{9n+7} = \left(\frac{3n+2}{3n+2} + \frac{1}{3n+2}\right)^{9n+7}$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{3n}\right)^{3}\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{7}$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{3n+2}\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{-2}\right]^{3}\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{7}$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right]^{3}\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{1}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right]^{3}\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^{1} = e^3 \cdot (1+0) = e^3.$$

b) $b_n = \sqrt{9n^2-4n+2} - (3n+2)$, $\boxed{4}$

Lösung:

$$b_n = \sqrt{9n^2-4n+2} - (3n+2) \overset{\text{3. bin. Formel}}{=} \frac{\sqrt{9n^2-4n+2}^{\,2} - (3n+2)^2}{\sqrt{9n^2-4n+2} + (3n+2)}$$

$$= \frac{9n^2-4n+2-9n^2-12n-4}{\sqrt{n^2(9-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2})} + n(3+\frac{2}{n})}$$

$$= \frac{-16n-2}{n(\sqrt{9-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} + 3 + \frac{2}{n})} = \frac{-16-\frac{2}{n}}{\sqrt{9-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} + 3 + \frac{2}{n}}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-16-\frac{2}{n}}{\sqrt{9-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} + 3 + \frac{2}{n}} = \frac{-16-0}{\sqrt{9-0+0}+3+0} = -\frac{8}{3}.$$

c) $c_n = \dfrac{-4n^4+7n^2-1}{3n^4-4n^3+3n^2+10}$. $\boxed{2}$

Lösung:

$$c_n = \frac{-4n^4+7n^2-1}{3n^4-4n^3+3n^2+10} = \frac{n^4(-4+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^4})}{n^4(3-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{10}{n^4})}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-4+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^4}}{3-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{10}{n^4}} = \frac{-4+0-0}{3-0+0+0} = -\frac{4}{3}.$$

Aufgabe 5:

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^k$. $\boxed{2}$

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{7}\right)^k \overset{\text{geom. Summe}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{7})^{n+1}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1-0}{\frac{6}{7}} = \frac{7}{6}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-3k+5}{5k^5+2k^2-1}$ konvergiert. $\boxed{4}$

Lösung:

Untersuche $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-3k+5}{5k^5+2k^2-1}$ mit dem Majorantenkriterium.
Vergleiche dazu a_k mit $c\cdot\frac{k^2}{k^5} = c\cdot\frac{1}{k^3}$ für ein $c>0$. Dazu:

$$0 \le a_k = \frac{k^2-3k+5}{5k^5+2k^2-1} \overset{\text{Zähler vergr.}}{\le} \frac{k^2-0+5k^2}{5k^5+2k^2-1} \overset{\text{Nenner verkl.}}{\le} \frac{6k^2}{5k^5+0-k^5} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k^3}.$$

Somit ist $0 \le a_k \le \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k^3}$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ konvergent ist, folgt mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-3k+5}{5k^5+2k^2-1}$.

Aufgabe 6: 10 Mäuse gelangen zufällig in einen Getreidespeicher, in dem sich vorher noch keine Mäuse befanden. Im Durchschnitt ist die Geburtenrate bei Mäusen höher als die Sterberate, so dass als Wachstumsfaktor $k = 0,025 \left[\frac{1}{Tag}\right]$ angenommen werden kann. Die Anzahl der Mäuse, die sich nach t Tagen im Getreidespeicher befinden, wird durch das allgemeine Wachstumsgesetz $M(t) = M(0) \cdot e^{k \cdot t}$ beschrieben.

a) Nach wie viel Tagen hat sich die Anzahl der Mäuse verdoppelt? $\boxed{2}$

Lösung:

Man stellt zunächst die Funktion $M(t)$ auf, die die Anzahl der Mäuse nach t Tagen im Getreidespeicher beschreibt, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ genau 10 Mäuse in den Speicher gelangt sind.
Gegeben sind: $k = 0,025 \left[\frac{1}{Tag}\right]$ und $M(0) = 10$, also:

$$M(t) = 10 \cdot e^{0,025\left[\frac{1}{Tag}\right] \cdot t}.$$

Gesucht ist nun das t, für das gilt: $M(t) = 20$, denn genau dann hat sich die Anzahl der Mäuse verdoppelt. Dazu:

$$\begin{array}{rrcl} & 20 & = & M(t) \\ \Longleftrightarrow & 20 & = & 10 \cdot e^{0,025\left[\frac{1}{Tag}\right] \cdot t} \\ \Longleftrightarrow & 2 & = & e^{0,025\left[\frac{1}{Tag}\right] \cdot t} \\ \Longleftrightarrow & \ln 2 & = & 0,025 \left[\frac{1}{Tag}\right] \cdot t \\ \Longleftrightarrow & t & = & \frac{1}{0,025} \cdot \ln 2 \; [Tage] \\ \Longleftrightarrow & t & \approx & 27,73 \; [Tage]. \end{array}$$

Nach ca. 28 Tagen hat sich die Anzahl der Mäuse verdoppelt.

b) Wie viele Mäuse befinden sich nach einem Jahr im Getreidespeicher? $\boxed{2}$

Lösung:

$M(365 \; Tage) = 10 \cdot e^{0,025 \cdot 365} \approx 91.820$

Nach einem Jahr befinden sich ca. 91.820 Mäuse im Getreidespeicher.

Aufgabe 7:

a) Bestimmen Sie zu den Funktionen f und g den maximalen Definitionsbereich sowie die erste Ableitung. (Vereinfachen des Ausdrucks ist nicht erforderlich!)

(i) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^2+10}}{\sqrt{x^2-9}}$, $\boxed{2}$

Lösung:

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^2+10}}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{(x^2+10)^{\frac{1}{4}}}{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbb{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}/x < -3 \text{ oder } x > 3\}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{4}(x^2+10)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x \cdot (x^2-9)^{\frac{1}{2}} - (x^2+10)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2-9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x^2-9} \\ &= \frac{\frac{1}{2}x(x^2+10)^{-\frac{3}{4}}(x^2-9)^{\frac{1}{2}} - x(x^2+10)^{\frac{1}{4}}(x^2-9)^{-\frac{1}{2}}}{x^2-9}. \end{aligned}$$

(ii) $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2-1)}$. $\boxed{2}$

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(g) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0 \text{ und } \ln(x^2-1) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -1 \text{ oder } x > 1) \text{ und } x^2 - 1 \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -1 \text{ oder } x > 1) \text{ und } x \neq -\sqrt{2} \text{ und } x \neq \sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{0 - 1 \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x}{(\ln(x^2-1))^2} = -\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{(\ln(x^2-1))^2}.$$

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f(x) = 2e^{4x+3}$. $\boxed{1}$

Lösung:

$$F(x) = 2e^{4x+3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}e^{4x+3}.$$

c) Wie groß ist die Fläche, die von $f(x) = \dfrac{9}{2x-1}$ und $g(x) = -2x + 11$ eingeschlossen wird? $\boxed{3}$

Lösung:

Man bestimmt zunächst die Schnittstellen zwischen f und g:

$$\begin{array}{lrcl}
 & f(x) & = & g(x) \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{9}{2x-1} & = & -2x+11 \\
\overset{x\neq\frac{1}{2}}{\Longleftrightarrow} & 9 & = & (2x-1)(-2x+11) \\
\Longleftrightarrow & 9 & = & -4x^2+24x-11 \\
\Longleftrightarrow & 4x^2-24x+20 & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & x^2-6x+5 & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & (x-1)(x-5) & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & x_1 = 1 & , & x_2 = 5
\end{array}$$

Also berechnet man die gesuchte Fläche durch

$$\begin{aligned}
F &= \left|\int_1^5 \frac{9}{2x-1} + 2x - 11 \; dx\right| = \left|\left[9 \cdot \ln(2x-1) \cdot \frac{1}{2} + x^2 - 11x\right]_{x=1}^{x=5}\right| \\
&= \left|9 \cdot \ln(2 \cdot 5 - 1) \cdot \frac{1}{2} + 5^2 - 11 \cdot 5 - \left(9 \cdot \ln(2-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 - 11\right)\right| \\
&= \left|\frac{9}{2} \cdot \ln(9) + 25 - 55 - 1 + 11\right| = |9\ln(3) - 20| \\
&\approx 10,112.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8: Es sei $f(x) = (x^2 - 2x)e^{x+0,5}$ gegeben. Bestimmen Sie
a) den maximalen Definitionsbereich $D(f)$, $\boxed{1}$

Lösung:

$\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}$.

b) die Nullstellen, $\boxed{2}$

Lösung:

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & (x^2-2x)e^{x+0,5} & = & 0 \\ \overset{e^{x+0,5}\neq 0}{\Longleftrightarrow} & x^2-2x & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & x=0 & \text{oder} & x=2. \end{array}$$

$N_1(\ 0 \mid 0\ )$, $N_2(\ 2 \mid 0\ )$.

c) das Verhalten von $f(x)$ an den Rändern des Definitionsbereichs, $\boxed{2}$

Lösung:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-2x)e^{x+0,5} = 0^+$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x^2-2x)e^{x+0,5} = \infty$.

d) die Monotoniebereiche, $\boxed{2}$

$f'(x) = (2x-2)e^{x+0,5} + (x^2-2x)e^{x+0,5} = e^{x+0,5}(2x-2+x^2-2x) = e^{x+0,5}(x^2-2)$.

Damit erhält man:

$$\begin{array}{rrcl} & f'(x) & > & 0 \\ \Longleftrightarrow & e^{x+0,5}(x^2-2) & > & 0 \\ \overset{e^{x+0,5}>0}{\Longleftrightarrow} & x^2-2 & > & 0 \\ \Longleftrightarrow & x<-\sqrt{2} & \textit{oder} & x>\sqrt{2}. \end{array}$$

Für $x < -\sqrt{2}$ und für $x > \sqrt{2}$ ist $f(x)$ streng monoton wachsend, für $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ist $f(x)$ streng monoton fallend.

e) die relativen Extrema. $\boxed{2}$

Lösung:

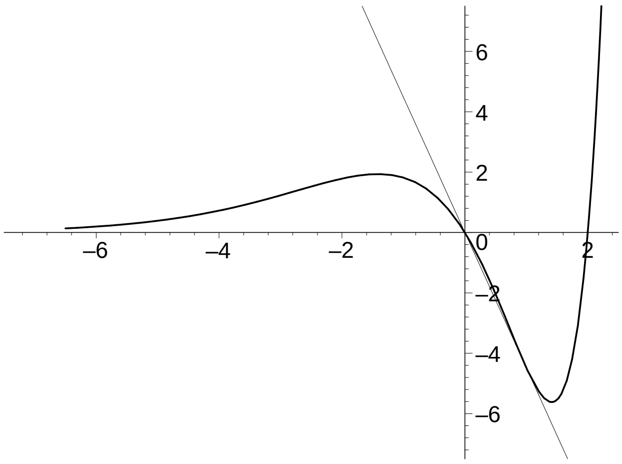
Mit den Ergebnissen aus d) erhält man:

An der Stelle $x = -\sqrt{2}$ hat $f'(x)$ einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, also liegt an der Stelle $x = 0$ ein Maximum vor: Max($-\sqrt{2} \mid (2 + 2\sqrt{2})e^{0,5-\sqrt{2}}$);

an der Stelle $x = \sqrt{2}$ hat $f'(x)$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$, also liegt an der Stelle $x = \sqrt{2}$ ein Minimum vor: Min($\sqrt{2} \mid (2 - 2\sqrt{2})e^{0,5+\sqrt{2}}$).

f) Skizzieren Sie den Graphen zu $f(x)$ möglichst genau mit Hilfe der unter a)–e) gewonnenen Informationen. $\boxed{2}$

Lösung:



$f(x) = (x^2 - 2x)e^{x+0,5}$, $t(x) = -e^{1,5}x$

g) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an die Funktion im Punkt $P(1 \mid f(1))$. Zeichnen Sie diese ebenfalls in das Koordinatensystem! $\boxed{3}$

Lösung:

Die allgemeine Gleichung für eine Tangente lautet $t(x) = y = mx + c$. Die Steigung m bestimmt man mit Hilfe der ersten Ableitung:

$$m = f'(1) = (-1) \cdot e^{1,5} = -e^{1,5}.$$

Setzt man nun m und $P(1 \mid f(1)) = P(1 \mid -e^{1,5})$ in $t(x)$ ein, erhält man:

$$\begin{array}{rrcl} & -e^{1,5} & = & -e^{1,5} \cdot 1 + c \\ \Longleftrightarrow & c & = & 0. \end{array}$$

Somit lautet die Gleichung der Tangente in P an den Graph von f:

$$t(x) = -e^{1,5} \cdot x.$$