LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK Aachen, den 15.01.04
Prof. Dr. R. Stens
P. - M. Küpper

Musterlösung zu Übung 10, Aufgabe 1 d)*:

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen hinsichtlich folgender Gesichtspunkte: i) Definitionsbereich, ii) Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches, iii) Nullstellen, iv) Monotoniebereiche, v) Extrema. Fertigen Sie anschließend eine Skizze an!

d)* $f(x) = x^3 e^{2x}$

Lösung

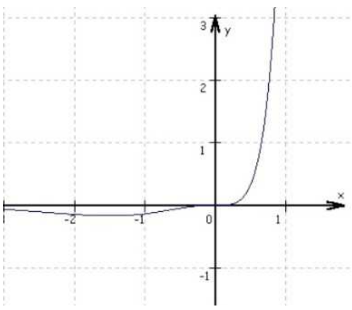
i) $\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

iii) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 e^{2x} = 0$
$\Leftrightarrow x^3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$
$N(0/0)$

iv) $f'(x) = 3x^2 e^{2x} + x^3 \cdot 2e^{2x} = e^{2x} \cdot x^2(3 + 2x)$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 + 2x > 0$ und $x \neq 0$
$\Leftrightarrow x > -1,5$ und $x \neq 0$.
Für $x \neq 0$ und $x > -1,5$ ist $f(x)$ streng monoton wachsend, für $x < -1,5$ ist $f(x)$ streng monoton fallend.

v) An der Stelle $x = -1.5$ hat $f'(x)$ einen Vorzeichenwechsel von - nach +, also hat $f(x)$ ein Minimum an der Stelle $x = -1.5$.
$Min(-1,5/-3.375e^{-3})$



$f(x) = x^3 e^{2x}$

Musterlösung zu Übung 11, Aufgabe 3 b)*:

Aufgabe 3: Es sei $t \in \mathbb{R}$. Führen Sie an den folgenden Funktionen das Programm aus Aufgabe 2 durch. Fertigen Sie jeweils eine Skizze für $t = -2$ und für $t = 2$ an.

a)* $f_t(x) = \ln(1 + tx^2)$
Lösung

i) $\mathbb{D}(f_t) = \mathbb{R}$, falls $t > 0$
$\mathbb{D}(f_t) = \{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{\sqrt{-t}} < x < \frac{1}{\sqrt{-t}}\}$, falls $t < 0$

ii) Für $t > 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_t(x) = \infty = \lim\limits_{x\to\infty} f_t(x)$

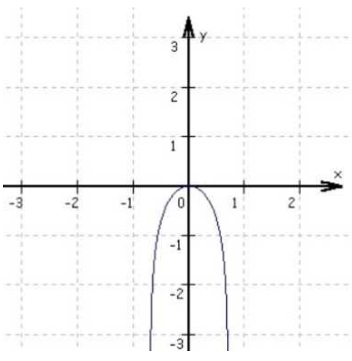
Für $t < 0$: $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{\sqrt{-t}}^+} f_t(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{-t}}^-} f_t(x)$

iii) $f_t(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + tx^2) = 0$
$\Leftrightarrow 1 + tx^2 = 1$
$\Leftrightarrow tx^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$
$N(0/0)$

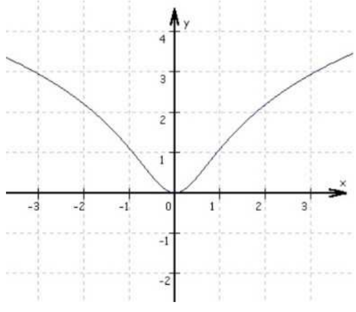
iv)+v) $f_t'(x) = \frac{1}{1+tx^2} \cdot 2tx = \frac{2tx}{1+tx^2}$

Für $t > 0$: $f_t'(x) > 0 \Leftrightarrow 2tx > 0 \Leftrightarrow x > 0$
Für $x > 0$ ist $f_t(x)$ streng monoton wachsend, für $x < 0$ streng monoton fallend, d.h. Vorzeichenwechsel von $f_t'(x)$ an der Stelle $x = 0$ von - nach +, also hat $f_t(x)$ an der Stelle $x = 0$ ein Minimum.

Für $t < 0$: $f_t'(x) > 0 \Leftrightarrow 2tx > 0 \Leftrightarrow x < 0$
Für $x < 0$ ist $f_t(x)$ streng monoton wachsend, für $x > 0$ streng monoton fallend, d.h. Vorzeichenwechsel von $f_t'(x)$ an der Stelle $x = 0$ von + nach -, also hat $f_t(x)$ an der Stelle $x = 0$ ein Maximum.



$f_{-2}(x) = \ln(1 - 2x^2)$



$f_2(x) = \ln(1 + 2x^2)$