LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
P. - M. Küpper

Aachen, den 30.01.04

Klausur zur Mathematik für Biologen

Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 20 der möglichen 60 Punkte.
(Bearbeitungszeit: 2 Stunden)

Viel Erfolg!

Aufgabe 1:

a) Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich;
dabei seien $a, b, x, y \in \mathbb{N}, x \neq y$.

(i) $\dfrac{(a^2 - b^2)(x^2 - 2xy + y^2)}{(a + b)^2(x + y)^3(x - y)^2}$, (ii) $\dfrac{(3a^{-6}b^4)^{-4}}{(9a^7b^{-3})^3}$. $\boxed{2} + \boxed{2}$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $|x - 5| \cdot x \leq 3x$. $\boxed{4}$

Aufgabe 2: Die empfohlene Tagesdosis an Vitamin C beträgt $60\,mg$. Es stehen zwei Fruchtsäfte A und B zur Verfügung; in $100\,ml$ von A sind $30\,mg$, in $100\,ml$ von B sind $5\,mg$ an Vitamin C enthalten.

a) Welchem Prozentsatz entspricht die jeweils angegebene Menge Vitamin C in jedem Saft? Wie viel Prozent Vitamin C enthält ein Saft, bei dem sich in $500\,ml$ genau $60\,mg$ Vitamin C befinden? $\boxed{3}$
(Gehen Sie bei der Berechnung des Prozentsatzes davon aus, dass $1\,mg$ gleichzusetzen ist mit $\frac{1}{1000}\,ml$!)

b) Wie müssen die Säfte A und B gemischt werden, dass in $500\,ml$ der Mischung genau $60\,mg$ Vitamin C enthalten sind? $\boxed{3}$

c) Wie viel mg Vitamin C müssen $750\,ml$ Saft enthalten, damit der Prozentsatz an Vitamin C $0,01\,\%$ beträgt? $\boxed{1}$

Aufgabe 3: $\boxed{4}$

Das statistische Bundesamt in Deutschland hat bekannt gegeben, dass im Jahr 2000 in NRW genau $18 \cdot 10^6$ Menschen gelebt haben. Man kann davon ausgehen, dass die Bevölkerung jedes Jahr um 1% abnimmt, da die Geburtenrate kleiner ist als die Sterberate. Zusätzlich wandern aber jährlich $2 \cdot 10^5$ Menschen in dieses Bundesland ein.
Ermitteln Sie nach diesen Angaben eine Formel, die beschreibt, wie viele Menschen voraussichtlich nach n Jahren in NRW leben werden und berechnen Sie, wie viele Menschen 2005 in NRW leben werden.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen, die gegeben sind durch

a) $a_n = \left(\dfrac{3n+3}{3n+2}\right)^{9n+7}$, $\boxed{3}$

b) $b_n = \sqrt{9n^2 - 4n + 2} - (3n+2)$, $\boxed{4}$

c) $c_n = \dfrac{-4n^4 + 7n^2 - 1}{3n^4 - 4n^3 + 3n^2 + 10}$. $\boxed{2}$

Aufgabe 5:

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^k$. $\boxed{2}$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 3k + 5}{5k^5 + 2k^2 - 1}$ konvergiert. $\boxed{4}$

Aufgabe 6: 10 Mäuse gelangen zufällig in einen Getreidespeicher, in dem sich vorher noch keine Mäuse befanden. Im Durchschnitt ist die Geburtenrate bei Mäusen höher als die Sterberate, so dass als Wachstumsfaktor $k = 0,025 \left[\frac{1}{Tag}\right]$ angenommen werden kann. Die Anzahl der Mäuse, die sich nach t Tagen im Getreidespeicher befinden, wird durch das allgemeine Wachstumsgesetz $M(t) = M(0) \cdot e^{k \cdot t}$ beschrieben.

a) Nach wie vielen Tagen hat sich die Anzahl der Mäuse verdoppelt? $\boxed{2}$

b) Wie viele Mäuse befinden sich nach einem Jahr im Getreidespeicher? $\boxed{2}$

Aufgabe 7:

a) Bestimmen Sie zu den Funktionen f und g den maximalen Definitionsbereich sowie die erste Ableitung. (Vereinfachen des Ausdrucks ist nicht erforderlich!)

(i) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^2+10}}{\sqrt{x^2-9}}$, (ii) $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2-1)}$. $\boxed{2} + \boxed{2}$

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f(x) = 2e^{4x+3}$. $\boxed{1}$

c) Wie groß ist die Fläche, die von $f(x) = \dfrac{9}{2x-1}$ und $g(x) = -2x + 11$ eingeschlossen wird? $\boxed{3}$

Aufgabe 8: Es sei $f(x) = (x^2 - 2x)e^{x+0,5}$ gegeben. Bestimmen Sie
a) den maximalen Definitionsbereich $D(f)$, $\boxed{1}$
b) die Nullstellen, $\boxed{2}$
c) das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs, $\boxed{2}$
d) die Monotoniebereiche, $\boxed{2}$
e) die relativen Extrema. $\boxed{2}$
f) Skizzieren Sie den Graphen von f mit Hilfe der Informationen aus a)–e). $\boxed{2}$
g) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an die Funktion $\boxed{3}$
im Punkt $P(\ 1 \mid f(1)\ )$. Zeichnen Sie diese ebenfalls in das Koordinatensystem!