Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. F. Fehér

Aachen, den 22.5.2006

3. Übung zur Theorie der Rieszräume

Abgabe Mo. 29.5.2006

Aufgabe 1: Sei $L = M = \mathbb{R}^n$ mit der koordinatenweise definierten $\leq$- Relation (vgl. Beispiel (1) der Vorlesung). Man zeige:
Jede (n, n)-Matrix A aus Einsen und Nullen mit genau einer Eins in jeder Zeile und genau einer Eins in jeder Spalte (="Permutationsmatrix") beschreibt einen Rieszisomorphismus des $\mathbb{R}^n$ auf sich.

Aufgabe 2: Man beweise das folgende "Matrix-Theorem": Ist L ein Rieszraum und sind $(f_i)_{i<n}$ bzw. $(g_j)_{j<m}$ mit $m \geq 2$ zwei endliche Folgen in L^+, sodass

$$\sum_{i<n} f_i = \sum_{j<m} g_j,$$

dann existiert eine Doppelfolge $(z_{ij})_{i<n, j<m}$ in L^+, sodass für alle $i < n$ und $j < m$ gilt

$$f_i = \sum_{k<m} z_{ik}, \qquad g_j = \sum_{k<n} z_{kj}.$$

Aufgabe 3: Man beweise die folgende Verallgemeinerung des Riesz-schen Zerlegungssatzes:
Es sei L ein Rieszraum, $(f_i)_{i<n}$ eine endliche Folge in L^+ und $g \in L$ mit

$$|g| \leq \sum_{i<n} f_i.$$

Dann gibt es eine endliche Folge $(g_i)_{i<n}$ in L, sodass

$$g = \sum_{i<n} g_i \qquad \textit{und} \qquad |g_i| \leq f_i \quad (i < n).$$

Tipp: Man wende Aufgabe 2 an auf die Summe

$$\sum_{i<n} f_i = g^+ + g^- + \left(\sum_{i<n} f_i - |g| \right).$$