Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. F. Fehér

Aachen, den 08.05.2006

2. Übung zur Theorie der Rieszräume

Abgabe Mo. 22.05.2006

Aufgabe 1: Sei $A = (a_{ij})$ eine (n,m)-Matrix, deren Elemente a_{ij} zu dem Verband L gehören. Man beweise

$$\bigvee_{j=1}^{n}\left(\bigwedge_{i=1}^{m} a_{ij}\right) \leq \bigwedge_{k=1}^{m}\left(\bigvee_{l=1}^{n} a_{kl}\right).$$

Aufgabe 2: Man beweise die folgenden Rechenregeln für Rieszräume:

(a) $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$

(b) $f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$

(c) $|f| = f \vee (-f) = f^+ + f^-$

(d) $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$; $(f+g)^- \leq f^- + g^-$

(e) $|f| \vee |g| = \frac{1}{2}(|f+g| + |f-g|)$.

Aufgabe 3: Es sei

$$L := NBV[a,b] := \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f \text{ ist v.b.V. auf } [a,b],\; f(a) = 0\}$$

versehen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation.
Weiter sei

$$K := \{f \in NBV[a,b] \quad / \; f \text{ ist monoton fallend auf } \quad [a,b]\}.$$

(a) Man führe auf L eine $\leq$-Relation ein, sodass $K = L^+$ gilt.

(b) Man zeige, dass L ein Rieszraum ist.

(c) Man bestimme f^+ und f^- speziell für $f(x) = \sin x$ falls $[a,b] = [0, 2\pi]$ ist.

Aufgabe 4: Es sei $L := M(\Omega, \mathbb{A}, \mu)$ die Menge der μ-messbaren Funktionen auf Ω. Auf $M(\Omega, \mathbb{A}, \mu)$ sei eine Relation $\sqsubseteq$ erklärt durch:

$$f \sqsubseteq g :\Longleftrightarrow f \leq g \quad \mu - \textit{fast überall}.$$

Unter Verwendung geeigneter Sätze der Maßtheorie zeige man, dass

$$(M(\Omega, \mathbb{A}, \mu)\,; +\,, \alpha \cdot \sqsubseteq)$$

ein Rieszraum ist.