Vollständigkeit

Vortrag im Rahmen des Proseminars zur Analysis, 17.03.2006

Albert Zeyer

Ziel des Vortrags ist es, die Vollständigkeit auf Basis der Konstruktion von $\mathbb{R}$ über die CAUCHY-Folgen zu beweisen und äquivalente Aussagen zur Vollständigkeit für allgemeine Körper herzuleiten.

§ 1 Konstruktion der reellen Zahlen

Mit Hilfe von rationalen CAUCHY-Folgen kann man die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* als deren Grenzwerte konstruieren.

Es folgt die Konstruktion.

(1.1) Definition
Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller rational CAUCHY-Folgen und $\mathcal{F}_0$ die Menge der rationalen Nullfolgen.

Dann definieren wir die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahl durch

$$\mathbb{R} := \mathcal{F}/\mathcal{F}_0 = \{(x_n)_n + \mathcal{F}_0 \mid (x_n)_n \in \mathcal{F}\}$$

Mit den Verknüpfungen für $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{F}, \lambda \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad ((x_n)_n + \mathcal{F}_0) + ((y_n)_n + \mathcal{F}_0) := (x_n + y_n)_n + \mathcal{F}_0 \\
&(2) \quad ((x_n)_n + \mathcal{F}_0) \cdot ((y_n)_n + \mathcal{F}_0) := (x_n \cdot y_n)_n + \mathcal{F}_0 \\
&(3) \quad \lambda \cdot ((x_n)_n + \mathcal{F}_0) := (\lambda \cdot x_n)_n + \mathcal{F}_0 \\
&(4) \quad ((x_n)_n + \mathcal{F}_0) < ((y_n)_n + \mathcal{F}_0) :\Leftrightarrow \\
&\qquad \text{es gibt ein } \epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0 \text{ und ein } N \in \mathbb{N} \text{ existiert,} \\
&\qquad \text{so dass } x_n + \epsilon < y_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq N
\end{aligned}$$

bildet $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ eine kommutative $\mathbb{Q}$-Algebra mit Eins. ◇

Nun zeigen wir, dass diese Menge mit den angegebenen Verknüpfungen einen angeordneten Körper bildet.

(1.2) Satz
$(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ ist ein archimedisch angeordneter Körper mit $(0)_n + \mathcal{F}_0$ als Nullelement, $(1)_n + \mathcal{F}_0$ als Einselement,

$$-((x_n)_n + \mathcal{F}_0) = (-x_n)_n + \mathcal{F}_0$$

als Inverses der Addition von $(x_n)_n + \mathcal{F}_0 \in \mathbb{R}$ und

$$((x_n)_n + \mathcal{F}_0)^{-1} = (y_n)_n + \mathcal{F}_0 \quad \text{mit} \quad y_n := \begin{cases} \dfrac{1}{x_n}, & \text{falls } x_n \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x_n = 0 \end{cases} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

als Inverses der Multiplikation von $(x_n)_n + \mathcal{F}_0 \neq (0)_n + \mathcal{F}_0$. ◇

Wir wiederholen nun die geometrische Reihe aus der Analysis I.

(1.3) Lemma
a) Für $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ ist $(x^n)_n$ eine Nullfolge und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

b) Für $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1$ ist $(x^n)_n$ unbeschränkt.

Beweis
Bereits aus der Analysis I bekannt. □

Wir benötigen diese Aussage für den Vortrag über die g-adische Bruchdarstellung.

§ 2 Die Vollständigkeit

In diesem Abschnitt zeigen wir die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, verschiedene äquivalente Aussagen zur Vollständigkeit sowie die Isomorphie eines beliebigen vollständigen, angeordneten Körper zu $\mathbb{R}$.

Zunächst zeigen wir die Vollständigkeit unseres konstruierten Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.

(2.1) Satz
a) $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede CAUCHY-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

b) $\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{Q}$, die als reelle Folge gegen x konvergiert.

Beweis

b) Sei $x = (x_n)_n + \mathcal{F}_0 \in \mathbb{R}$, also $(x_n)_n \in \mathcal{F}$. Wir zeigen nun, dass die rationale CAUCHY-Folge $(x_n)_n$ als reelle Folge gegen x konvergiert.

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Da zu allen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$ existiert,[1] wählen wir $\delta \in \mathbb{Q}$, so dass $0 < \delta < \epsilon$. Da $(x_n)_n$ eine rationale CAUCHY-Folge ist, existiert für dieses δ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \delta$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq N$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |x_n - ((x_m)_m + \mathcal{F}_0)| \\ &= (|x_n - x_m|)_m + \mathcal{F}_0 \\ &\leq (\delta) + \mathcal{F}_0 \\ &= \delta < \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq N. \end{aligned}$$

Da ϵ frei gewählt war, gilt insgesamt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, was zu zeigen war.

a) Sei $(a_n)_n$ CAUCHY-Folge in $\mathbb{R}$. Zu zeigen ist nun, dass diese Folge einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ besitzt.

Wir konstruieren nun eine rationale CAUCHY-Folge $(x_n)_n$, um darüber den Grenzwert x zu definieren.

Mit $a_n \in \mathbb{R}$ liegt auch $a_n + \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$. Wie wir bereits wissen, gibt es deshalb für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$a_n < x_n < a_n + \frac{1}{n}.$$

Wir müssen nun zeigen, dass $(x_n)_n$ auch eine rationale CAUCHY-Folge ist.

Sei $\epsilon \in \mathbb{Q}$, $\epsilon > 0$ beliebig. Da $(a_n)_n$ eine CAUCHY-Folge ist, existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq N_1.$$

Da $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ eine Nullfolge ist, existiert auch ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n} < \epsilon \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2.$$

[1] Aus Analysis I bekannt.

Mit diesen beiden Ungleichungen folgt für alle $n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - a_n + a_n - a_m + a_m - x_m| \\ &\leq |x_n - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - x_m| \\ &< \frac{1}{n} + |a_n - a_m| + \frac{1}{m} \\ &< 3\epsilon \end{aligned}$$

Und somit ist $(x_n)_n$ eine rationale CAUCHY-Folge.

Wir definieren uns nun unseren Grenzwert $x := (x_n)_n + \mathcal{F}_0 \in \mathbb{R}$ und müssen nun zeigen, dass dieses x auch wirklich der Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ ist.

Sei $\delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0$ beliebig. Wir können nun ein $\epsilon \in \mathbb{Q}$ finden mit $0 < \epsilon < \delta$ und finden damit N_1 und N_2 in $\mathbb{N}$ wie oben. Nach der Definition von x folgt

$$\begin{aligned} |a_n - x| &\leq |a_n - x_n| + |x_n - x| \\ &< \frac{1}{n} + |x_n - x| \\ &= \frac{1}{n} + |x_n - ((x_n)_n + \mathcal{F}_0)| \\ &= (\frac{1}{n} + |x_n - x_m|)_m + \mathcal{F}_0 \\ &< (4\epsilon)_m + \mathcal{F}_0 \\ &= 4\epsilon < 4\delta \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{N_1, N_2\}. \end{aligned}$$

Da die Grenze δ beliebig war, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$, was zu zeigen war. □

Wir benötigen im Weiteren die Wiederholung der Begriffe Infimum, Supremum und der Intervalle.

(2.2) Definition (Infimum und Supremum)
Sei $M \subset K$.

Man nennt ein Element $x \in M$ *Infimum* von M, wenn $x \leq m$ für alle $m \in M$ und $x \geq s$ für alle unteren Schranken s von M. Man schreibt dann $x = \inf M$. Mit anderen Worten ist das *Infimum* also die größte untere Schranke von M.

Das *Supremum* $\sup M$ definiert man als $-\inf\{-m \mid m \in M\}$, also mit anderen Worten die kleinste obere Schranke von M.

Infimum und *Supremum* sind eindeutig, falls sie existieren. ◇

(2.3) Definition (Intervalle)
Man nennt eine Teilmenge M eines angeordneten Körpers $(K,<)$ *Intervall*, es $a,b \in K,\ a \leq b$ gibt, so dass M mit einer der folgenden Mengen übereinstimmt.

Seien $a,b \in K,\ a < b$.

$$(-\infty,\infty) := K,$$
$$(a,\infty) := \{x \in K \mid x > a\}, \quad (\infty,b) := \{x \in K \mid x < b\}, \quad (a,b) := (a,\infty) \cap (-\infty,b),$$
$$[a,b) := \{a\} \cup (a,b), \qquad [a,\infty) := \{a\} \cup (a,\infty),$$
$$(a,b] := \{b\} \cup (a,b), \qquad (-\infty,b] := \{b\} \cup (-\infty,b),$$
$$[a,b] := \{a,b\} \cup (a,b)$$
◇

Wir untersuchen nun äquivalente Aussagen zur Vollständigkeit.

(2.4) Satz (Äquivalenzsatz für Vollständigkeit)
Sei $(K,<)$ ein angeordneter Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Jede nach unten beschränkte, nicht leere Teilmenge von K besitzen ein Infimum in K.

(i)' Jede nach oben beschränkte, nicht leere Teilmenge von K besitzen ein Supremum in K.

(ii) Seien $A,B \subset K,\ A,B \neq \emptyset,\ B = K \setminus A$, so dass für alle $a \in A,\ b \in B$ gilt, dass $a < b$ ist. Außerdem soll B kein Minimum besitzen. Dann besitzt A ein Maximum.

(iii) Jede nach unten beschränkte, monoton fallende Folge in K besitzen auch einen Grenzwert in K.

(iii)' Jede nach oben beschränkte, monoton steigende Folge in K besitzen auch einen Grenzwert in K.

(iv) K ist archimedisch angeordnet und jede CAUCHY-Folge konvergiert in K.

(v) K ist archimedisch angeordnet und zu jeder Folge $I_n = [a_n,b_n]$ von Intervallen in K mit der Eigenschaft $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ existiert ein $s \in K$ mit
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] = \{s\}.$$

Beweis
„(i) $\Rightarrow$ (i)'“:

Sei M eine nach oben beschränkte, nicht leere Teilmenge von K. Die Menge $-M := \{-x \mid x \in M\}$ ist dann nach unten beschränkt. Nach Voraussetzung existiert nun ein Infimum von $-M$, so dass nach Definition des Supremums auch ein Supremum von M existiert mit $\sup M = -\inf(-M)$.

„(i) $\Leftarrow$ (i)'“: analog

„(iii) $\Rightarrow$ (iii)'“:

Sei $(a_n)_n$ eine nach oben beschränkte, monoton steigende Folge in K. Dann ist $(-a_n)_n$ eine nach unten beschränkte, monoton fallende Folge. Nach Voraussetzung konvergiert $(-a_n)_n$ und daraus folgt, dass auch $(a_n)_n$ konvergiert.

„(iii) $\Leftarrow$ (iii)'“: analog

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“:

Sei A eine nichtleere Teilmenge von K und $B := K \setminus A \neq \emptyset$, so dass $a < b$ für alle $a \in A,\ b \in B$ und B kein Minimum besitzt.

Wir müssen nun zeigen, dass A ein Maximum besitzt.

Nach Wahl der Mengen ist B nach unten beschränkt, es existiert also nach Voraussetzung ein $\beta := \inf B \in K$. Da B kein Minimum besitzt, folgt $\beta \notin B$, also $\beta \in A$, da A das Komplement zu B ist. Da β das Infimum von B ist und jedes $a \in A$ untere Schranke von B ist, folgt $\beta \geq a$ für alle $a \in A$. Es folgt, dass β also das Maximum von A ist und somit ist die Existenz bewiesen.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“:

Sei $(b_n)_n$ eine nach unten beschränkte, monoton fallende Folge in K.

Wir müssen nun zeigen, dass $(b_n)_n$ in K konvergiert. Dazu konstruieren wir uns für (ii) die Mengen A und B wie folgt:

$$A := \{x \in K \mid x \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

$$B := K \setminus A = \{x \in K \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } b_n < x\}$$

Wir müssen nun zeigen, dass diese Mengen A und B die Voraussetzungen von (ii) erfüllen.

Da $(b_n)_n$ nach unten beschränkt ist, existiert eine untere Schranke $s \in K$. Nach Definition von A folgt, dass s in A liegt, also ist A nicht leer.

Weil aber beispielsweise $b_1 + 1$ nicht in A liegt, gilt nicht $A = K$ und damit ist B als Komplement von A auch nicht leer.

Für alle $b \in B$ gilt nach Definition von B, dass wir immer ein $n \in \mathbb{N}$ finden, so dass $b_n < b$ ist. Nach Definition von A sind alle Elemente von A kleiner als dieses b_n und damit auch kleiner als das beliebig gewählte b. Somit folgt, dass für alle $b \in B,\ a \in A$ $a < b$ ist.

B besitzt kein Minimum, denn gäbe es ein Minimum $\beta \in B$, so finden wir nach Definition von B ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b_n < \beta$ ist. Wir definieren uns nun einen Mittelwert zwischen β und b_n als

$$x := \frac{\beta + b_n}{2},$$

der nach Definition von B auch in B liegt, denn $x > b_n$. Weil aber auch $x < \beta$ ist, kann β kein Minimum von B sein.

Die Voraussetzungen von (ii) sind damit erfüllt, so dass nach (ii) A ein Maximum α besitzt. Wir zeigen nun, dass $(b_n)_n$ gegen α konvergiert.

Da α das Maximum von A ist, gilt für alle $\epsilon \in K,\ \epsilon > 0$, dass $\alpha + \epsilon \notin A$. Da B das Komplement von A ist, liegt $\alpha + \epsilon$ in B. Nach Definition von B existiert nun ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$b_N < \alpha + \epsilon.$$

Weil $(b_n)_n$ monoton fallend ist, ist auch

$$\alpha + \epsilon > b_n$$

also

$$b_n - \alpha < \epsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq N$$

Da $\epsilon \in K,\ \epsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha \in K$, was zu zeigen war.

„(iii) $\Rightarrow$ (iv)“:

Seien $a, b \in K,\ a, b > 0$.

Wir zeigen nun: Wenn jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge in K konvergiert (iii), dann ist K auch archimedisch angeordnet.

Wäre nämlich K nicht archimedisch angeordnet, würde für alle $n \in \mathbb{N}$ $n \cdot a \leq b$ gelten. Damit ist $(n \cdot a)_n$ eine nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge. Diese besitzt nach (iii)′ einen Grenzwert α. Nach Definition des Limes existiert also zu a ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\alpha - n \cdot a| < a \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq N, \text{d.h.}$$

$$\alpha - a < n \cdot a < \alpha + a.$$

Wegen $\alpha - a < N \cdot a$ folgt

$$\alpha + a < (N+2) \cdot a,$$

was ein Widerspruch zu

$$(N+2) \cdot a < \alpha + a$$

ist.
Es ergibt sich also, dass K archimedisch angeordnet ist.

Es bleibt zu zeigen, dass jede CAUCHY-Folge in K konvergiert.

Sei also $(a_n)_n$ eine CAUCHY-Folge in K. Wie aus der Analysis I bekannt, gibt es eine monotone, beschränkte Teilfolge$(a_{n_j})_j$ in K. Nach (iii) bzw. (iii)′ besitzt $(a_{n_j})_j$ einen Grenzwert $s \in K$, d.h. für alle $\epsilon \in K,\ \epsilon > 0$ existiert ein J, so dass

$$|a_{n_j} - s| < \epsilon \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N},\ j \geq J.$$

Weil $(a_n)_n$ eine CAUCHY-Folge ist, existiert auch ein N, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq N.$$

Weil $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, folgt insgesamt

$$|a_k - s| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - s| < 2\epsilon \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},\ k \geq \max\{J, N\},$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s \in K$, was zu zeigen war.

„(iv) $\Rightarrow$ (v)“:

Sei K archimedisch angeordnet und $I_n = [a_n, b_n]$ eine Folge von Intervallen in K mit der Eigenschaft $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Wir müssen nun zeigen: Wenn jede CAUCHY-Folge in K konvergiert (iv), dann gibt es ein $s \in K$ mit $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{s\}$.

Um (iv) anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, dass $(a_n)_n$ eine CAUCHY-Folge in K ist.

Aus $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ folgt, dass zu jedem $\epsilon \in K,\ \epsilon > 0$ sich ein $N \in \mathbb{N}$ finden lässt, so dass

$$|b_n - a_n| = b_n - a_n < \epsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq N$$

gilt. Da alle Intervalle $I_{n+1} \subset I_n$ sind für alle $n \in \mathbb{N}$, also $a_n \geq a_m \geq b_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n$, folgt

$$a_m - a_n < \epsilon \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq N.$$

Also ist $(a_n)_n$ eine CAUCHY-Folge in K.

Aus (iv) folgt nun die Existenz von $s := \lim\limits_{n \to \infty} a_n \in K$.

Da $(a_n)_n$ monoton steigend ist und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq b_n$$

gilt, ist $s \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Wir zeigen nun, dass alle anderen $z \in K,\ z \neq s$ nicht in der Menge liegen. Aus $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ folgt zu der Grenze $|z - s|$ die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - a_n| < |z - s|,$$

was heißt, dass

$$z \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Insgesamt folgt also

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{s\},$$

was zu zeigen war.

„(v) $\Rightarrow$ (i)“:

Sei K archimedisch angeordnet, $M \neq \emptyset$, $M \subset K$ und M nach unten beschränkt.

Wir müssen zeigen, dass M ein Infimum besitzt.

Um (v) anwenden zu können, benötigen wir eine in sich geschachtelte Intervall-Folge, deren Grenzen wir nun konstruieren wollen.

Da M nach unten beschränkt ist, existiert eine untere Schranke, die wir als a_1 bezeichnen wollen. Da M nicht leer ist, existiert ein $b_1 \in M$. Nun konstruieren wir induktiv die weiteren Elemente der Grenzen. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$c_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n),$$

$$a_{n+1} := \begin{cases} c_n \\ a_n \end{cases}, \quad b_{n+1} := \begin{cases} b_n, & \text{falls } c_n \leq m \quad \text{für alle } m \in M \\ c_n, & \text{falls } c_n > m \quad \text{für ein } m \in M \end{cases}.$$

Die Intervall-Folge bezeichnen wir als $(I_n)_n$ mit $I_n := [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Direkt aus der Konstruktion folgt $I_{n+1} \subset I_n$ sowie $b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b_1 - a_1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der archimedischen Anordnung von K folgt

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b_1 - a_1)\right) = 0.$$

Aus (v) folgt nun die Existenz eines $s \in K$ mit

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{s\}. \qquad (1)$$

Wir zeigen nun, dass dieses s das Infimum von M ist.

Zunächst zeigen wir dafür, dass s eine untere Schranke von M ist. Wäre s das nicht, würde ein $m \in M$ mit $m < s$ existieren. Nach Konstruktion von $(a_n)_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ a_n eine untere Schranke von M, also $a_n \leq m$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (1) ist außerdem $s \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, es folgt also insgesamt

$$a_n \leq m < s \leq b_n,$$

also

$$[m, s] \subset [a_n, b_n],$$

was ein Widerspruch zu (1) ist. s ist also eine untere Schranke von M.

Wir zeigen nun, dass s auch die größte untere Schranke von M ist. Sei $t \in K,\ t > s$. Da $t \neq s$ ist, gibt es wegen (1) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $t \notin [a_n, b_n]$, d.h. $t > b_n$. Nach Konstruktion von $(b_n)_n$ ist allerdings $b_n \in M$, also ist t keine untere Schranke von M.

Insgesamt folgt, dass $s = \inf M$, was zu zeigen war. $\square$

Wir zeigen nun die Isomorphie eines beliebigen vollständigen, archimedisch angeordneten Körpers zu $\mathbb{R}$.

(2.5) Satz
Sei K ein archimedisch angeordneter und vollständiger Körper. Dann gilt:

$$K \cong \mathbb{R}$$

Beweis
Für $1 \in K$ ist $\mathbb{Q}$ der von 1 erzeugte Teilkörper[2].

Sei $a \in K$ beliebig. Es existiert nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a < a_n < a + \frac{1}{n}$[3]. Analog zum Beweis von (2.1)(a) ist $(a_n)_n$ eine CAUCHY-Folge in $\mathbb{Q}$, die als Folge in K gegen a konvergiert.

Da a beliebig gewählt war, ist

$$\begin{array}{llll} lim: & \mathcal{F} & \to & K \\ & (x_n)_n & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} x_n \end{array}$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus mit

$$\text{Kern } lim = \{(z_n)_n \in \mathcal{F} \mid \lim_{n\to\infty} z_n = 0\} = \mathcal{F}_0.$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, da jede CAUCHY-Folge in $\mathbb{Q}$ auch eine CAUCHY-Folge in K ist, die wegen der Vollständigkeit von K auch konvergiert. Die Homomorphie folgt aus den Limitenregeln.

Es folgt aus dem Homomorphiesatz[4], dass

$$K \cong \mathcal{F}/\mathcal{F}_0 = \mathbb{R}. \qquad \square$$

[2]Wegen $1 > 0$ ist die Abbildung $\mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto n \cdot 1$ aufgrund der archimedischen Anordnung injektiv. Da K ein Körper ist, ist mit $n \cdot 1 \in K$ auch $(n \cdot 1)^{-1} \in K$, so dass man auch mit $\mathbb{Q} \to K$, $\frac{m}{n} \mapsto m \cdot n^{-1}$ eine injektive Abbildung hat, $\mathbb{Q}$ also als Teilkörper von K angesehen werden kann, der von der 1 erzeugt wurde.

[3]Der entsprechende Satz hierfür wird vorausgesetzt.

[4]Sei $f : V \to W$ ein Epimorphismus mit Kern $f = U$, dann hat man mit $V/U \to W$, $v + U \mapsto f(v)$ einen wohldefinierten Isomorphismus, d. h. $V/U \cong W$.