LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 31. Mai 2005

8. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 15. Juni 2005, vor der Übung

Aufgabe 1

Seien $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Zeigen Sie:

1. Gilt $x^n = a$ für ein $x \in \mathbb{Q}$, so ist $x \in \mathbb{Z}$.
2. Die Gleichung $x^n = a$ hat genau dann eine Lösung in $\mathbb{Q}$, wenn $a = m^n$ für ein $m \in \mathbb{Z}$.

(3+1 Punkte)

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgende Aussage: Ist $(a_n)_n$ eine CAUCHY-Folge in $\mathbb{Q}$, aber keine Nullfolge, dann existieren $\delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0$, und ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit $|a_n| \geqslant \delta$ für alle $n \geqslant N$. (3 Punkte)

Aufgabe 3

Zeigen sie, dass es keinen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ und der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ gibt. (4 Punkte)

Aufgabe 4

In Übung 5, Aufgabe 4, haben wir $\sim_m$ durch

$$x \sim_m y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + k \cdot m,$$

definiert. Wir haben weiter gezeigt, dass die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{Z}/\sim_m$ eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung

$$[a]_{\sim_m} \sqcup [b]_{\sim_m} := [a+b]_{\sim_m}, \qquad a, b \in \mathbb{Z},$$

darstellt.

(a) Definieren Sie nun eine weitere Verknpüpfung „$\boxdot$“ auf $\mathbb{Z}/\sim_m$. Welche algebraische Struktur hat $((\mathbb{Z}/\sim_m) \setminus [0]_{\sim_m}, \boxdot)$?

(b) Unter welchen Bedingungen an m erhält man eine Gruppenstruktur auf $((\mathbb{Z}/\sim_m) \setminus [0]_{\sim_m}, \boxdot)$? Welche algebraische Struktur stellt dann $(\mathbb{Z}/\sim_m, \sqcup, \boxdot)$ dar?

(c) Unter Benutzung von (b) zeigen Sie folgende Aussage: Zu jeder Primzahl $p \geqslant 3$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}, 1 \leqslant m < p$, und $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = mp$.

(2+3+4 Punkte)