LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 31. Mai 2005

7. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mi., 8. Juni 2005, im Übungskasten des Lehrstuhls A für Mathematik, vor HG R155

Aufgabe 1

Ist $a = \sum_{i=0}^{n} q_i g^i$ die g-adische Darstellung von $a \in \mathbb{N}$, so heißt

$$Q'_q(a) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i q_i$$

alternierende g-adische Quersumme von a. Zeigen Sie:

$$(g+1)|a \Leftrightarrow (g+1)|Q'_q(a).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $m \in \mathbb{N}, m > 1$ ungerade. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(i) m ist keine Primzahl.

(ii) Es gibt $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a > b + 1$ und $m = a^2 - b^2$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3

Wir definieren die Äquivalenzrelation „$\sim$“ durch

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} \Leftrightarrow m \cdot n' = n \cdot m';$$

dann definieren wir wie in der Vorlesung

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim .$$

Zeigen Sie, dass die Operationen „ $+$ “ : $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ und „ $\cdot$ “ : $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Vertreter, sind. Überlegen Sie sich, warum es nicht sinnvoll ist, $\mathbb{Q}$ als

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \sim$$

zu definieren. Begründen Sie weiterhin, warum man die Addition auf $\mathbb{Q}$ nicht durch

$$[(m, n)] \oplus [(k, l)] := [(m + k, n + l)]$$

definiert. (5 Punkte)

Aufgabe 4

Sei $g \in \mathbb{N}, g \geqslant 2$ und

$$\mathbb{D}_g := \left\{ \varepsilon \sum_{k=-n}^{m} d_k g^k ; \varepsilon \in \{1, -1\}, d_k \in \{0, \dots, g-1\}, n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{D}_g = \{\frac{a}{g^n}; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\} = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{g}\right]$,

(b) $\mathbb{D}_g$ ist ein echter Unterring von $\mathbb{Q}$, der $\mathbb{Z}$ umfasst,

(c) $\mathbb{D}_g \subset \mathbb{D}_h \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : g | h^m$,

(d) $\mathbb{Q} = \cup_{g=2}^{\infty} \mathbb{D}_g$.

(3+3+3+3 Punkte)