LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 10. Mai 2005

5. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 25. Mai 2005, vor der Übung

Aufgabe 1

Beweisen Sie Satz 2.46 der Vorlesung:
Seien A, B und $M_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, abzählbare Mengen, dann gilt:

1. $A \cup B$ ist abzählbar.
2. $A \times B$ ist abzählbar.
3. $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ ist abzählbar.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $X := \{0, 1\}$ und $X^{\mathbb{N}_0}$ die Menge aller Folgen mit Elementen aus X. Zeigen Sie, dass $X^{\mathbb{N}_0}$ überabzählbar ist. (4 Punkte)

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die algebraische Struktur $(N, *)$ mit $m * n := m^n$ für $m, n \in \mathbb{N}$ (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Existenz von rechts- bzw. linksneutralem Element und Existenz von Rechts- bzw. Linksinversem). (1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 4

Sei $m \in \mathbb{N}$, dann definieren wir auf der Menge $\mathbb{Z}$ eine Relation $\sim_m$ durch

$$x \sim_m y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + k \cdot m.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\sim_m$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Sei p die zu $\sim_m$ zugehörige Projektion auf die Äquivalenzklasse, $p : a \mapsto [a]_{\sim_m}, a \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{Z}$ die Mengen

$$p^{-1}(p(a)) \quad \text{und} \quad p(p^{-1}([a]_{\sim_m})).$$

(iii) Erklären Sie eine Gruppenstruktur „$\sqcup$“ auf der Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{Z}/\sim_m$ und beweisen Sie ihre Aussagen.

(iv) Folgern Sie

$$\bigsqcup_{[a]_{\sim_m} \in \mathbb{Z}/\sim_m} ([a]_{\sim_m} \sqcup [a]_{\sim_m}) = [0]_{\sim_m},$$

aus der allgemeinen Aussage für abelsche Gruppen; formulieren und beweisen Sie diese Aussage für den Fall einer beliebigen abelschen Gruppe $(G, \cdot)$.

(1+1+3+3 Punkte)

Aufgabe 5

Wie im Skript, Kapitel 3.2, definieren wir auf $\mathbb{Z}$ eine Kleiner-oder-gleich-Relation durch

$$[(j,k)] \circledleq [(m,n)] :\Leftrightarrow j + n \leqslant k + m.$$

Beweisen Sie nun die Aussagen a) und b) von Lemma 3.14. (3+2 Punkte)