LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 31. März 2005

# 2. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 27. April 2005, vor der Übung

**Aufgabe 1**

Seien $M$ und $N$ nicht-leere Mengen; $R$ sei eine Relation auf $M$, und $S$ eine Relation auf $N$. Weiter sei auf $M \times N$ die Relation $\sim$ definiert durch

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow (a,c) \in R \quad \text{und} \quad (b,d) \in S, \qquad a,c \in M; b,d \in N.$$

Beweisen Sie:

$$\sim \text{ ist eine Äquivalenzrelation} \Leftrightarrow R \text{ und } S \text{ sind Äquivalenzrelationen.}$$

(3 Punkte)

**Aufgabe 2**

Ist $X$ eine Menge, $R \subset X \times X$ eine Relation auf $X$ und $Y \subset X$ eine Teilmenge von $X$, so sei

$$R^{-1}(Y) := \{x; x \in X \quad \text{und es gibt ein} \quad y \in Y \quad \text{mit} \quad (x,y) \in R\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $Y \subset X$ die Äquivalenz

$$R^{-1}(Y) \subset Y \Leftrightarrow R(X \setminus Y) \subset X \setminus Y,$$

gilt. (2 Punkte)

**Aufgabe 3**

$M$ sei eine Menge, $R$ eine Relation auf $M$ und $\Delta_M := \{(x,x); x \in M\}$ die *Diagonale* von $M$. Sei $R^{-1}$ die Umkehrrelation und $R' := R \setminus \Delta_M$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $R$ ist antisymmetrisch,

(ii) $(R' \circ R) \cap \Delta_M = \emptyset$,

(iii) $(R' \circ R') \cap \Delta_M = \emptyset$. (2+1+1 Punkte)

**Aufgabe 4**

Sei $M$ eine nicht-leere Menge und $\phi : M \to M$ eine Abbildung. Für jede Teilmenge $A \subset M$ sei

$$H(A) := \bigcap \{X; A \subset X \subset M \ \text{ und } \ \phi(X) \subset X\}.$$

Zeigen Sie:

1. $A = H(A) \Leftrightarrow \phi(A) \subset A$,
2. Bezüglich der durch die Inklusion auf $\mathfrak{P}(M)$ gegebenen Ordnung gilt:

$$H(A) = \min\{X; A \subset X \subset M \quad \text{und} \quad \phi(X) \subset X\}.$$

3. Definiert man für $n \in \mathbb{N}_0$ die Abbildungen $\phi^n : M \to M$ rekursiv durch,

$$\phi^0 := id_M,\ \phi^{k+1} := \phi \circ \phi^k := \phi(\phi^k), \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

so gilt:

$$H(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \phi^n(A)$$

(3+3+4 Punkte)