LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 5. Juli 2005

# 13. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 20. Juli 2005, vor der Übung

**Bemerkung:**

Die Punkte dieser Übung zählen nicht mehr zu den Pflichtpunkten, kommen aber ihrem Punktekonto zugute.

**Aufgabe 1**

Leiten Sie für die Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \neq 1$, die Reihenentwicklung

$$\exp_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

her, und beweisen Sie damit die Funktionalgleichung

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y), \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 2 (Polynome/rationale Funktionen)**

(a) Zeigen Sie auf zwei verschiedene Weisen, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades aus $\mathbb{R}[x]$ bereits eine reelle Nullstelle besitzt.

(b) Hat $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ nur Nullstellen der Form $iy, y \in \mathbb{R}$, so gilt $p(x) \in \mathbb{R}[x^2]$ oder $p(x) \in x \cdot \mathbb{R}[x^2]$.

(3+2 Punkte)

**Aufgabe 3 (hyperbolische Funktionen)**

Wir definieren die Funktionen

$$\sinh(t) := \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von sinh und cosh.

(b) Bestimmen und beweisen Sie hyperbolische Analoga zu

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

sowie

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv sind

(3+3+5 Punkte)

**Aufgabe 4 ($\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum)**

(a) Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}_{>0}, a \neq 1$, die Menge $\{\log_a p;\ p \in \mathbb{P}\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Fassen Sie $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ auf. Bildet die oben betrachtete Menge $\{\log_a p;\ p \in \mathbb{P}\}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$?

(3+2 Punkte)