LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. R. Stens
M. Hentschel

Aachen, den 10. Juni 2005

10. Übung zur Vorlesung Zahlbereichserweiterungen

Abgabe: Mittwoch, 29. Juni 2005, vor der Übung

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, für die $\sum_{k=0}^{4} g^k$ ein Quadrat aus $\mathbb{Z}$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2 (Vier-Quadrate-Satz von FERMAT)

Beweisen Sie den Vier-Quadrate-Satz, d.h., jede natürliche Zahl ist darstellbar als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen.
Anleitung:

(i) Zeigen Sie zuerst, dass das Produkt zweier als Summe von vier Quadraten darstellbarer Zahlen wieder eine Summe von vier Quadraten ist.

(ii) Benutzen Sie Aufgabe 4 c) aus Übung 8 und überlegen Sie sich, wie man $m = 1$ erreichen kann.

(3* + 5* Punkte)

Aufgabe 3 (MERSENNEzahlen)

Die sogenannten MERSENNEzahlen sind Zahlen der Form

$$M_p := 2^p - 1, \qquad p \in \mathbb{P};$$

benannt sind diese Zahlen nach dem französischem Mönch und Priester Marin Mersenne (1588-1648). Die Zahlen dieser Form dienen einem Projekt (`www.mersenne.org`) als Kandidaten für große Primzahlen. Ende Februar wurde die damals größte bekannte Primzahl $M_{24.036.583}$ durch $M_{25.964.951}$ abgelöst. Große Primzahlen finden Anwendung in der Kryptographie; man macht sich die Asymmetrie zwischen dem Aufwand der Multiplikation zweier großer Primzahlen und dem Auffinden der Primfaktoren dieses Produktes zunutze.

Ihre Aufgabe:

(a) Zeigen Sie, dass nicht alle MERSENNEzahlen Primzahlen sind.

(b) Gilt $M_p \in \mathbb{P}$ so folgt $p \in \mathbb{P}$.

(c) Sei G eine endliche Gruppe; zeigen Sie, dass für jede Untergruppe U gilt, dass $\#U$ teilt $\#G$.

(d) Betrachten Sie die Primfaktoren der MERSENNEzahlen und zeigen Sie, z.B. unter Zuhilfenahme von (c), dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

(2+1+2+5 Punkte)

Aufgabe 4 (Rekursive Folgen)

Sei $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2$; dann wähle ein $x \in \mathbb{R}^{>0}$ mit $x_0^m > a$ und definiere die Folge $(x_n)_n$ rekursiv durch

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}}.$$

Bestimmen Sie, ob die Folge konvergent ist, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. *Hinweis*: Benutzen Sie die Bernoullische Ungleichung.

(4 Punkte)

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die g-adische Darstellung der folgenden Zahlen:

a) $\frac{23}{11}$ für $g = 8$,

b) $\frac{12}{13}$ für $g = 5$.

(insg. 3 Punkte)