

## 9. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 29.06.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

**Aufgabe 1:** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $\sim$  die Relation auf  $X$ , so dass für  $x, y \in X$  die Relation  $x \sim y$  genau dann besteht, wenn eine Kurve  $f : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $f(0) = x$  und  $f(1) = y$  existiert. Zeigen Sie:

- a)  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation. 2
- b) Für  $x \in X$  ist die Kurvenzusammenhangskomponente  $W(x) := \{y \in X ; y \sim x\}$  die größte  $x$  enthaltende, kurvenzusammenhängende Teilmenge von  $X$ . 2
- c)  $W(x) = C(x)$  für alle  $x \in X$ , falls jeder Punkt eine offene, kurvenzusammenhängende Umgebung besitzt. 2

**Aufgabe 2:** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- a) Es seien  $a, b, c \in X$  und es gebe eine Kurve von  $a$  nach  $b$  und eine Kurve von  $b$  nach  $c$ . Zeigen Sie: Es existiert eine Kurve von  $a$  nach  $c$  und eine Kurve von  $b$  nach  $a$ . 6
- b) Zeigen Sie: Sind  $A, B$  kurvenzusammenhängende Teilmengen von  $X$  und ist  $A \cap B \neq \emptyset$ , so ist auch  $A \cup B$  kurvenzusammenhängend. Genügt hierfür auch die schwächere Voraussetzung  $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ ? (Beweis oder Gegenbeispiel!) 2
- c) Zeigen Sie: Jede kurvenzusammenhängende Teilmenge  $Y$  von  $X$  liegt in einer maximalen kurvenzusammenhängenden Teilmenge. 2

**Aufgabe 3:** Gegeben sei der  $\mathbb{R}^n$  mit der natürlichen Topologie.

- a) Zeigen Sie: Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, so ist jede Zusammenhangskomponente von  $U$  offen, und es gibt höchstens abzählbar unendlich viele solche Komponenten. 2
- b) Geben Sie eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  mit überabzählbar vielen Zusammenhangskomponenten an. 2

**Aufgabe 4\*:** Sei  $\mathcal{T}_n$  die Zariski-Topologie auf  $\mathbb{K}^n$ ,  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Zeigen Sie:

- a) Jede Zariski-offene Menge  $A \neq \emptyset$  ist dicht in der natürlichen Topologie auf  $K^n$ . 3
- b)  $(K^n, \mathcal{T}_n)$  ist nicht Hausdorffsch. 3