LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 25.05.2004

6. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 08.06.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $I \neq \emptyset$ und $(f_i : X \to Y)_{i\in I}$ die Familie aller stetigen Abbildungen von X in Y sowie $\mathcal{T}$ die Initialtopologie von $(f_i : X \to Y)_{i\in I}$.

a) Zeigen Sie: $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_X$. $\boxed{1}$

b) Gilt stets $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$? (Beweis oder Gegenbeispiel!) $\boxed{2}$

c) Für $\underline{X} = \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{nat}$. $\boxed{1}$

d) Für $\underline{X} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{nat}), \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ gilt ebenfalls $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{nat}$. $\boxed{3}$

Aufgabe 2: Ist die nicht-euklidische Ebene H aus Aufgabe 3, Übung 2 ein topologischer Unterraum von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{nat})$ für ein $n \in \mathbb{N}$? $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Einbettung** von $\underline{X}$ in $\underline{Y}$, wenn f ein Homöomorphismus von $\underline{X}$ auf den topologischen Unterraum $\underline{f(X)}$ von $\underline{Y}$ ist. Zeigen Sie, dass f genau dann eine Einbettung ist, wenn gilt:

(i) f ist injektiv,

(ii) f ist stetig und

(iii) für jedes offene $U \subset X$ ist $f(U)$ offen in $\underline{f(X)}$. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Seien $(Y, \mathcal{T}_{rel})$ ein topologischer Unterraum des nichtleeren topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ und $A \subset Y$. Zeigen Sie:

a) $\overset{\circ}{A} \subset B$, wobei B der offene Kern von A in der Relativtopologie auf Y ist. $\boxed{1}$

b) $C \subset Y \cap \partial A$, wobei C der Rand von A in der Relativtopologie auf Y ist. $\boxed{2}$

c) Zeigen Sie an Beispielen, dass weder in a) noch in b) Gleichheit gelten muss. $\boxed{2}$

Aufgabe 5*: Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \|x\| \leq 1\}$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Innern. X und B_n seien jeweils mit der natürlichen Topologie versehen. Zeigen Sie, dass X und B_n homöomorph sind.
Hinweis: Definieren Sie zunächst eine Abbildung $l : X \setminus \{x_0\} \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$ für ein $x_0 \in \overset{\circ}{X}$, wobei $l(y)$ anschaulich die Länge der längstmöglichen Strecke von x_0 durch y in X bedeute. $\boxed{8}$

Aufgabe 6:

a) Λ heißt **Gitter** im $\mathbb{R}^n$, wenn es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ gibt mit $\Lambda = \mathbb{Z}b_1 + \ldots + \mathbb{Z}b_n$. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Topologie und zwei Gitter Λ, Λ' im $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass die Quotientenräume $\mathbb{R}^n/\Lambda$ und $\mathbb{R}^n/\Lambda'$ homöomorph sind. $\boxed{2}$

b) [Der Fall $n = 2$]. Zeigen Sie, dass der Quotientenraum $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ homöomorph zum 2–dimensionalen Torus

$$T^2 = \{(z, \omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\ ;\ |z| = |\omega| = 1\} = S^1 \times S^1$$

mit der Relativtopologie von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ist, wobei $\mathbb{C}$ mit der natürlichen Topologie versehen sei. $\boxed{2}$

Aufgabe 7: Sei $I \subset \mathbb{R}, |I| = \infty$ und $\mathbb{R}^I := \{f : I \to \mathbb{R}; f \text{ Abbildung}\}$ versehen mit der Produkttopologie. Zeigen Sie:

a) $U \subset \mathbb{R}^I$ ist genau dann Umgebung von $f \in \mathbb{R}^I$, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$, reelle Zahlen $a_i \in I$, $1 \leq i \leq n$ und $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\prod_{x \in I} U_x \subset U$, wobei $U_x = \mathbb{R}$ für $x \in I \setminus \{a_i; 1 \leq i \leq n\}$ und $U_{a_i} :=]f(a_i) - \varepsilon, f(a_i) + \varepsilon[$ für $1 \leq i \leq n$. $\boxed{6}$

b) Die Menge der polynomialen Abbildungen liegt dicht in $\mathbb{R}^I$. $\boxed{2}$