LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 11.05.2004

4. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 18.05.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $(X, \mathcal{T}_\rho)$ der topologische Raum aus Übung 1, Aufgabe 3. Untersuchen Sie für $X := \mathbb{R}$ und die Abbildungen

$$\rho(x,y) := x - y \quad \text{bzw.} \quad \rho(x,y) := xy \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

die folgenden Fragen:

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist $x \in S_\varepsilon(x)$? $\boxed{2}$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist $S_\varepsilon(x)$ offen in $\mathcal{T}_\rho$? $\boxed{2}$

c) Ist das System $\{S_\varepsilon(x);\, x \in \mathbb{R},\, \varepsilon > 0\}$ eine Subbasis (Basis) von $\mathcal{T}_\rho$? $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Seien $\underline{X} := (X, \mathcal{T}_X)$, $\underline{Y} := (X, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. In welchen der folgenden Fälle ist f dann notwendig ein Homöomorphimus bzw. mit Sicherheit kein Homöomorphimus?

a) $\underline{X} = \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$, $\boxed{3}$

b) $\underline{X} = \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$, $\boxed{2}$

c) $\underline{X} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat}), \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$, $\boxed{2}$

d) $\underline{X} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof}), \underline{Y} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{nat})$. $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Sei $\mathbb{N}$ versehen mit der kofiniten Topologie. f, g, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien definiert durch $f(1) = g(1) = h(1) := 1$ und

$$f(n) := \max\{k \in \mathbb{N}\,;\ k|n \text{ und } k < n\},$$
$$g(n) := \max\{k \in \mathbb{N}\,;\ k|n \text{ und } k \text{ prim}\},$$
$$h(n) := \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ prim}, \\ n - g(n), & \text{sonst.} \end{cases}$$

für $n \geq 2$. Untersuchen Sie die Abbildungen f, g und h auf Stetigkeit. $\boxed{4}$

Aufgabe 4: Die Menge $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ der reellen $n \times n$–Matrizen sei mit der natürlichen Topologie versehen. Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen abgeschlossene oder offene Teilmengen von $M_n(\mathbb{R})$ sind:

a) $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) := \{S \in M_n(\mathbb{R}); S^t = S\}$ (symmetrische Matrizen),

b) $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^t = -A\}$ (schiefsymmetrische Matrizen),

c) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{U \in M_n(\mathbb{R}); UU^t = U^tU = E\}$ (orthogonale Gruppe),

d) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (spezielle lineare Gruppe),

e) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (allgemeine lineare Gruppe),

f) $\mathrm{Nil}_n(\mathbb{R}) := \{N \in M_n(\mathbb{R})\,;\ \exists k \in \mathbb{N},\ N^k = 0\}$ (nilpotente Matrizen). $\boxed{6}$

Aufgabe 5: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\mathcal{T}_n$ die Zariski–Topologie auf $\mathbb{K}^n$ und $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine polynomiale Abbildung, d.h. es existieren Polynomfunktionen $p_1, \dots, p_m : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit

$$p(x) = (p_1(x), \dots, p_m(x)) \quad (x \in \mathbb{K}^n)\,.$$

Zeigen Sie, dass $p : (\mathbb{K}^n, \mathcal{T}_n) \to (\mathbb{K}^m, \mathcal{T}_m)$ stetig ist. $\boxed{4}$