LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 27.04.2004

2. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 04.05.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{2\}, [0,2], [2,4), [0,4), \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie für $\mathbb{R}$ ist. Ist $\mathcal{T}$ feiner oder gröber als $\mathcal{T}_{nat}$?
b) Geben Sie zu jedem $x \in \mathbb{R}$ das Umgebungssystem $\mathfrak{U}(x, \mathcal{T})$ an.
c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $A := (1,3)$ bezüglich $\mathcal{T}$. $\boxed{3}$

Aufgabe 2: Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{P} \neq \emptyset$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ heißt eine **Partition** von X, wenn je zwei Elemente von $\mathcal{P}$ disjunkt sind und $\cup_{P\in\mathcal{P}} P = X$ gilt.

a) Sei $\mathcal{P}$ eine Partition von X. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}$ die Basis einer Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ auf X ist. Diese Topologie heißt **Partitionstopologie** (zur Partition $\mathcal{P}$). Welche Partitionen muss man betrachten, um die diskrete bzw. indiskrete Topologie auf X zu erhalten? $\boxed{2}$

b) Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

   (i) $\mathcal{T}$ stimmt mit der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X überein.
   (ii) Es gibt eine Partition $\mathcal{P}$ von X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. $\boxed{3}$

Aufgabe 3:

a) Sei $\mathcal{T}_n$ die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ und

$$\mathcal{B} := \mathcal{T}_n \cup \{\ ]a, +\infty[\cup \{+\infty\}\ ;\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\ ]-\infty, b[\cup \{-\infty\}\ ;\ b \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie: $\mathcal{B}$ ist Basis einer Topologie $\mathcal{T}^*$ auf $\mathbb{R}^*$. $\boxed{3}$

b) Im $\mathbb{R}^2$ definiert man die obere Halbebene durch

$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y \geq 0\}.$$

Für $r > 0$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$K_r(x_0,y_0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$$

die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r.

Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{K_r(x,y)\ ;\ (x,y) \in H, 0 < r \leq y\} \cup \{K_r(x,r) \cup \{(x,0)\}\ ;\ x \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf H ist. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{[a,b[;\, a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ ist und dass $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ das erste, aber nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. $\boxed{4}$

Aufgabe 5: Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A,B \subset X$. Zeigen Sie:

a) $x \in A' \Rightarrow x \in (A \backslash \{x\})'$. $\boxed{2}$

b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$. $\boxed{3}$

c) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow (A \cap U) \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$. $\boxed{2}$

Aufgabe 6*: Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $\mathrm{Max}(R)$ die Menge der maximalen Ideale in R. Für jede Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Max}(R)$ sei

$$\overline{\mathcal{S}} := \{M \in \mathrm{Max}(R)\,;\, \textstyle\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \subseteq M\}.$$

Zeigen Sie: Es gibt genau eine Topologie auf $\mathrm{Max}(R)$, für die $\overline{\mathcal{S}}$ der Abschluss von $\mathcal{S}$ für jede Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Max}(R)$ ist. $\boxed{4}$

Bemerkung: Bitte beachten Sie den Übungstermin am 06.05., 11.45 Uhr, IV.