LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 20.07.2004

13. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 27.07.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Hinweise zur Klausur am 30.07.2004: Die Klausur findet im AM statt und beginnt um 16.00 Uhr. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten zuzüglich 15 Minuten Einarbeitungszeit. Klausurrelevant ist der Vorlesungsstoff bis einschließlich Montag, dem 19.07.2004. In einer Aufgabe werden auch Definitionen und Sätze abgefragt. Bezeichnungen und Ergebnisse der Übungsaufgaben sowie der Aufgaben im Skript werden nicht vorausgesetzt.

Aufgabe 1: Sei $(X, \mathcal{T})$ die **nested interval topology**, d.h. $X =]0,1[$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{U_n; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ mit $U_n :=]0, 1-1/n[\,, n = 2,3,4,\dots$. Man zeige:

a) $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf X. $\boxed{3}$

b) Jede offene Teilmenge von X, außer X selbst, ist quasi-kompakt. $\boxed{3}$

c) Keine abgeschlossene Teilmenge von X, außer $\emptyset$, ist quasi-kompakt. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Sei A eine Teilmenge des topologischen Raumes X und $x \in X$.
Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) $A \cap \mathcal{U}(x) := \{A \cap U\ ;\ U \in \mathcal{U}(x)\}$ ist ein Filter auf A.

(iii) Es gibt einen Filter $\mathcal{G}$ auf A, so dass der von $\mathcal{G}$ auf X erzeugte Filter $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ gegen x konvergiert. $\boxed{6}$

Aufgabe 3: Geben Sie jeweils eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Quasi–Kompaktheit der folgenden topologischen Räume an.

(i) $(X, \mathcal{T}_A)$ aus Aufgabe 2, Übung 1. $\boxed{3}$

(ii) $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$, wobei $\mathcal{P}$ eine Partition von X ist und $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ die zugehörige Topologie. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Welche der folgenden topologischen Räume sind kompakt oder quasi-kompakt?

(i) $(\mathbb{R}^*, \mathcal{T}^*)$ aus Aufgabe 3a), Übung 2. $\boxed{3}$

(ii) H aus Aufgabe 3b), Übung 2. $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Welche der folgenden Teilmengen von $M_n(\mathbb{R})$ sind kompakt?

(i) Die Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ der orthogonalen Matrizen. $\boxed{3}$

(ii) Die Menge $Nil_n(\mathbb{R})$ der nilpotenten Matrizen. $\boxed{3}$

(iii) $\{S \in Psd_n(\mathbb{R})\ ;\ \text{Spur}\ S \leq 1\}$, wobei $Psd_n(\mathbb{R})$ wieder die Menge der positiv semidefiniten Matrizen über $\mathbb{R}$ bezeichne. $\boxed{3}$

Aufgabe 6*: (Das Heiratsproblem nach *Halmos* und *Vaughan*)
Sei H eine Menge von Herren und D eine Menge von Damen. Für jeden Herrn h sei $F(h) \neq \emptyset$ die Menge aller Damen aus D, die mit h befreundet sind. Jeder Herr h soll nun mit einer Dame aus seinem Freundeskreis verheiratet werden, das heißt, es gilt, eine injektive Abbildung

$$f : H \to D \quad \text{mit} \quad f(h) \in F(h) \quad \text{für alle} \quad h \in H$$

zu finden. Offenbar ist hierfür folgende Bedingung notwendig:

(P) Sind $h_1, \ldots, h_n$ paarweise verschiedene Herren, dann gilt $|\bigcup_{i=1}^{n} F(h_i)| \geq n$.
Zeigen Sie:

(i) Ist H endlich und (P) erfüllt, dann besitzt das Heiratsproblem eine Lösung.
Hinweis: Vollständige Induktion nach $|H|$. $\boxed{3}$

(ii) Ist H unendlich, $F(h)$ für alle $h \in H$ endlich und (P) erfüllt, dann besitzt das Heiratsproblem eine Lösung.
Hinweis: Sei $F(h)$ mit der diskreten Topologie versehen. Betrachten Sie $X := \Pi_{h \in H} F(h)$, und wenden Sie den Satz von Tychonov an. $\boxed{5}$