LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 13.07.2004

12. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 20.07.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1:

a) Sei $g : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ eine Abbildung ($d \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie: Es gibt ein stetiges $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^d$. $\boxed{2}$

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen (mit Beweis) für die Existenz einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(a_n) = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ an. $\boxed{4}$

Aufgabe 2: Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $d(x,y) := \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$. Zeigen Sie:

a) d ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$, welche die natürliche Topologie induziert.
Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. $\boxed{4}$

b) Geben Sie eine Cauchy–Folge in $(\mathbb{R}, d)$ an, die nicht konvergiert. $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Zeigen Sie:

a) $Psd_n(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{P}_n(\mathbb{R})}$. Dabei sei $Psd_n(\mathbb{R})$ die Menge der positiv semidefiniten $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$. $\boxed{3}$

b) $GL_n(\mathbb{R})$ ist eine dichte Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$. $\boxed{3}$

c) $D_n(\mathbb{C})$ ist eine dichte Teilmenge von $M_n(\mathbb{C})$. Hier sei $D_n(\mathbb{C})$ die Menge der diagonalisierbaren Matrizen über $\mathbb{C}$. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Sei $\emptyset \neq X$ endlich. Zeigen Sie, dass jeder Filter auf X von der Form

$$\mathcal{F}_A := \{B \,;\, A \subset B \subset X\}, \; \emptyset \neq A \subset X$$

ist. Wie sehen die Ultrafilter aus? $\boxed{3}$

Aufgabe 5: Sei X unendlich. Zeigen Sie, dass auf X ein nicht–trivialer Ultrafilter existiert. $\boxed{3}$

Aufgabe 6*: Sei $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie versehen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \mathbb{R} \setminus \{1/n\}$. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sei definiert durch

$$\mathcal{F} := \{ \bigcap_{n \in J} A_n;\ J \subset \mathbb{N} \text{ endlich, } J \neq \emptyset \} \cup \{\mathbb{R}\}$$

a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist ein Filter auf $\mathbb{R}$. $\boxed{2}$

b) Ist $\mathcal{F}$ konvergent? (Begründung!) $\boxed{2}$

c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $\mathcal{F}$. $\boxed{3}$