LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. E. Görlich
Dipl.-Math. Andreas Haß

Aachen, den 29.06.2004

10. Übung zur Vorlesung Topologie

(Abgabe: Dienstag, 06.07.2004, bis 11.30 Uhr im Übungskasten)

Aufgabe 1: Sei X ein topologischer Raum und $\mathrm{Aut}(X)$ die Automorphismengruppe von X. Ist Γ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(X)$, so definiert man für $x, y \in X$:

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, f \in \Gamma \quad \text{mit} \quad f(x) = y.$$

Zeigen Sie:

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

b) Ist $|\Gamma| < \infty$ und X ein Hausdorff–Raum, so ist $X/\!\sim$ ein Hausdorff–Raum.

c) Kann man in b) auf die Voraussetzung $|\Gamma| < \infty$ verzichten? $\boxed{5}$

Aufgabe 2: Sei $X = \{a, b, c, d, e\}$ versehen mit der Topologie

$$\mathcal{T} := \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}, X\}.$$

a) Man bestimme alle Elemente der von $\mathcal{T}$ auf $A := \{a, c, e\}$ induzierten Topologie. $\boxed{1}$

b) Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum bzw. normal? $\boxed{2}$

c) Ist $(X, \mathcal{T})$ zusammenhängend? $\boxed{2}$

Aufgabe 3: Man zeige für eine beliebige nichtleere Menge X:

a) $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ ist regulär $\Leftrightarrow$ X ist endlich. $\boxed{3}$

b) $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{coab}})$ ist regulär $\Leftrightarrow$ X ist abzählbar. $\boxed{3}$

Aufgabe 4: Sind folgende topologische Räume hausdorffsch, normal und/ oder regulär?

a) Der topologische Raum $\mathbb{R}^*$ aus Aufgabe 3 a), 2. Übung. $\boxed{5}$

b) Die obere Halbebene H aus Aufgabe 3 b), 2. Übung. $\boxed{5}$

Aufgabe 5: Sei $\underline{X}$ ein normaler, topologischer Raum und $\underline{Y}$ ein topologischer Raum. Ferner sei $f : X \to Y$ eine surjektive, stetige und abgeschlossene Abbildung. Zeigen Sie: $\underline{Y}$ ist normal. $\boxed{5}$

Aufgabe 6*: Seien $\underline{X}, \underline{Y}$ topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels die Allgemeingültigkeit der folgenden Implikationen.

a) (i) $\underline{X}$ Hausdorff-Raum $\Longrightarrow$ $\underline{Y}$ Hausdorff-Raum .

(ii) $\underline{Y}$ Hausdorff-Raum $\Longrightarrow$ $\underline{X}$ Hausdorff-Raum . $\boxed{4}$

b) (i) $\underline{X}$ reguär $\Longrightarrow$ $\underline{Y}$ regulär .

(ii) $\underline{Y}$ regulär $\Longrightarrow$ $\underline{X}$ regulär . $\boxed{4}$